CICLO DE FORMAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO, DA PESQUISA E DA EXTENSÃO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

José Carlos Gonçalves Gaspar
André Luiz Souza Silva
Marcelo Silva Bastos
Vilmar Gomes da Fonseca
Organizadores

Pantanal Editora

2022

José Carlos Gonçalves Gaspar
André Luiz Souza Silva
Marcelo Silva Bastos
Vilmar Gomes da Fonseca
Organizadores

Ciclo de formação em ensino de matemática: contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática

Pantanal Editora

2022

Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo
Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: A editora. **Diagramação e Arte:** A editora. **Imagens de capa e contracapa:** Canva.com. **Revisão:** O(s) autor(es), organizador(es) e a editora.

Ficha Catalográfica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C568 Ciclo de formação em ensino de matemática [livro eletrônico] : contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática / Organizador José Carlos Gonçalves Gaspar... [et al.]. – Nova Xavantina, MT: Pantanal, 2022. 84p.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-81460-37-2
DOI https://doi.org/10.46420/9786581460372

1. Simetria. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Gaspar, José Carlos Gonçalves. II. Silva, André Luiz Souza. III. Bastos, Marcelo Silva. IV. Fonseca, Vilmar Gomes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Pantanal Editora

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000.
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil.
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp).
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br

Prefácio

Estimado(a) Leitor(a),

O que é apresentado nesta obra é resultado do trabalho docente incessante e de alta qualidade durante a maior crise sanitária desde a gripe espanhola no século XX. A pandemia do novo coronavírus causou a disseminação mundial da Covid-19, o isolamento social, *lockdowns* ao redor do mundo, quarentenas e milhares de contaminações e óbitos que poderiam ter sido evitados. Mas como as contaminações e óbitos poderiam ser evitados se pouco se conhecia acerca do novo vírus?

A resposta está também em cada capítulo desta obra. Contaminações e óbitos poderiam ter sido evitados se os conhecimentos científicos produzidos em diversas ciências, entre as quais a Matemática, tivessem sido levados em consideração desde o início da pandemia. Uma lição preciosa e dura que podemos tirar de 2 anos de pandemia é que ouvir a Ciência, desenvolver o pensamento científico, educar pelas práticas científicas remotas, híbridas e semipresenciais, além de valorizar os profissionais da educação brasileira é a senha para que em novas ondas pandêmicas estejamos mais preparados.

Assim, cada educador(a) que escreveu suas pesquisas nesta obra científica representa a força e a competência do profissionalismo docente brasileiro, promovendo ações remotas durante a pandemia com tecnologias móveis com materiais adaptados e lúdicos para atrair a atenção de milhares de estudantes que tiveram que estudar em suas casas, muito deles com extrema dificuldade de conexão de internet, mas sempre com o amparo e a dedicação dos professores e de suas famílias.

Destacamos as ações docentes que buscaram reduzir a desigualdade social e tecnológica em muitos lares brasileiros com ações de alfabetização científica online promovendo oficinas, *lives*, aulas síncronas e assíncronas em ambientes virtuais de aprendizagem, em suas universidades e institutos federais, para que cada estudante pudesse continuar seus estudos e compreender que somente com um pensamento crítico é possível combater as atrocidades promovidas por dois vírus.

Um vírus, o da covid-19, que a ciência conseguiu combater por meio da criação de vacinas em centros de pesquisa de instituições públicas brasileiras como o Butantan e a Fiocruz em parcerias com milhares de pesquisadores de universidade públicas brasileiras e estrangeiras. O segundo vírus que é tão letal quando o primeiro que é o vírus da desinformação que geram as denominadas *fake news*, também só é possível ser combatido com uma "vacina", a alfabetização científica capaz de gerar cidadãos críticos e capazes de ler, e interpretar conhecimentos, informações e notícias falsas.

Para combater ambos os vírus, ficou claro durante dois anos de pandemia que a Educação e a atuação de Educadore(a)s comprometidos com a Ciência promoverá estabilidade e segurança nas futuras ações híbridas que permearão o denominado "novo normal". Nessa nova caminhada, mais do que antes, a ação dos educadores será decisiva em aulas híbridas, contextos inter e transdisciplinares, com metodologias ativas, em aulas inclusivas e propostas de sala de aula invertida, realização de projetos de extensão, ações de iniciação científica e salas de aula transformadas em laboratórios para investigação científica.

Por fim, que todos o(a)s educadore(a)s brasileiro(a)s se inspirem nos conteúdos, saberes e conhecimentos problematizados nos capítulos dessa importante obra, elaborada para a divulgação científica.

Que mesmo diante dos maiores desafios sociais e profissionais cultivemos cada vez mais em nossas práticas educativas o verbo *esperançar* ensinado e exemplificado pelo nosso educador e patrono da educação Paulo Freire, *esperançar* no sentido de seguirmos em frente cientes dos aprendizados durante a pandemia e cientes de que na pós-pandemia o caminho deve ser iluminado pelas luzes da Ciência.

Que estejamos unidos a Todo(a)(e)s que creem que a Educação pode libertar qualquer povo das garras de regimes totalitários e neofascistas que maltratam e excluem.

Juiz de Fora, 15 de abril de 2022.

Marco Aurélio Kistemann (Pesquisa de Ponta-UFJF)

Sumário

Introdução

O laboratório itinerante é uma ação do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) que se iniciou em parceria com Pibid e tem por objetivo levar aos alunos de escolas públicas do entorno do campus metodologias norteadas pelas tendências em Educação Matemática que auxiliem na aprendizagem de conceitos matemáticos. Ações do laboratório itinerante acontecem desde 2018 e têm contribuído para o estímulo à prática da pesquisa para alunos do curso de licenciatura em Matemática da instituição, além de auxiliar os estudantes a superarem algumas dificuldades que surgem durante a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No momento, o laboratório tem realizado parcerias com algumas escolas da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro que se localizam nos municípios de Mesquita e Nilópolis. As atividades realizadas com os alunos das escolas envolvidas exploram tanto conceitos matemáticos de forma interdisciplinar, como também jogos e sequências de ensino com uso de materiais manipulativos industrializados ou construídos com material de baixo custo. A aplicação dessa metodologia tem contribuído para aproximar o licenciando da realidade que vai atuar, pois, em muitas realidades, a escola não dispõe de recursos didáticos que possibilitem uma construção significativa de conceitos matemáticos. Nesse sentido, o uso desses recursos a partir de materiais de baixo custo pode contribuir para que os futuros professores sejam instrumentalizados quanto à construção de materiais que atendam às diferentes necessidades dos alunos quanto à aprendizagem da Matemática.

Vendo o bom andamento do projeto e a possibilidade de ampliação dele, em 2019 o projeto foi submetido a fomento à Coordenação de Extensão (Coex) do IFRJ, sendo aprovado em dezembro desse mesmo ano. Durante o início de 2020, ainda no período de planejamento das ações com as escolas parceiras, houve a necessidade de paralisação das atividades presenciais por conta da epidemia da covid-19. Nesse instante, foi necessário reestruturar o projeto para que suas ações fossem em formato remoto. Dessa maneira, realizamos uma oficina pelo *google meet* na XXV Semana de Tecnologia (Sematec), com colaboração da equipe do projeto *Desenvolvimento Jogos Digitais na Educação*[1] (DJDE) do Colégio de Aplicação da UFRJ e do Projeto de Pesquisa *Pesquisa de Ponta, ligado* à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), com o título *Despertando para educação financeira: uma introdução gamificada*. Nela houve a participação de alunos do ensino médio, do curso de licenciatura em Matemática, professores de Matemática da Educação Matemática e uma professora de ensino superior.

Além da participação na Sematec, foi desenvolvido um ciclo de formação com transmissão pelo canal do Laboratório Ensino de Matemática (LabEM) no YouTube, com quatro encontros. No primeiro encontro, o professor Fernando Villar (CAP-UFRJ) ministrou a oficina *Práticas Didáticas Interativas e*

[1] Site do projeto disponível em https://www.jogosdigitais.cap.ufrj.br/

Avaliativas no Ensino Remoto[2]. Nela ele apresentou um pouco da sua experiência com os alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro durante a pandemia do coronavírus. O segundo encontro foi com o professor Luiz Felipe Lins (SME-RJ), por meio da palestra *Desenvolvendo competências e habilidades por meio da metodologia de projetos nas aulas de matemática*[3], que falou a respeito da sua experiência com alunos da rede municipal de educação da cidade do Rio de Janeiro, incluindo o projeto que o conduziu ao "Prêmio Shell de Educação Científica" em 2020. No terceiro encontro, a professora Ana Kaleff (UFF) proferiu a palestra *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*[4], em que apresentou reflexões sobre o ensino da geometria não euclidiana na escola básica frente às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que se destaca a importância do ensino e aprendizagem da geometria não euclidiana na escola básica no contexto da escola do século XXI. No quarto e último encontro do ciclo, as professoras Daniela Mendes (Uerj – Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) e Darling Domingos (Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) desenvolveram a oficina *Ensino de números reais com multimeios*[5].

Por fim, em junho de 2021, foi realizada a oficina *Aprendendo Geometria com as Mãos* em formato remoto. Tal ação foi em parceria com uma escola pública da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, localizada no município de Mesquita, na Baixada Fluminense, tendo a participação de alunos do 6º. ao 9º. ano do ensino fundamental. Ela ocorreu em dois encontros, que permitiram o desenvolvimento do conceito de simetria com apoio de dobraduras.

Como fruto de parte das ações realizadas durante o projeto, apresentamos este *ebook* composto por quatro capítulos, que serão descritos a seguir:

No primeiro capítulo, Geometria na Pandemia, os autores André Luiz Souza Silva, José Carlos Gonçalves Gaspar e Vilmar Gomes da Fonseca apresentam uma proposta didática inovadora para o ensino de simetria axial, com base em uma sequência didática de quatro tarefas exploratórias com recurso de dobraduras, recortes e uso de tecnologias digitais. Essa proposta didática resulta de ações do LabEM Itinerante do IFRJ/Campus Nilópolis, a partir da realização de um projeto de extensão realizado numa escola pública do município de Mesquita-RJ, e teve como base uma experiência de ensino que foi planejada e executada em contexto de ensino remoto, durante o advento da pandemia da covid-19 nessa escola. Os autores apresentam as premissas que influenciaram a construção da proposta didática, a saber: (i) o contexto da pandemia e o seu conjunto de limitações e desafios impostos; (ii) a escolha de conteúdo

[2] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=fYOgdh15mL4&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi, com 1644 visualizações em 15 de abril de 2022.

[3] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=oqJohU8Yhsw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=2, com 750 visualizações em 15 de abril de 2022.

[4] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=YxeW-2q_TMM&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=3, com 755 visualizações em 15 de abril de 2022.

[5] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=6yOFpdqD-tw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=4, com 583 visualizações em 15 de abril de 2022.

de geometria que considera as ideias de Felix Klein (1849-1925) no programa Erlangen; e (iii) práticas emergentes para o ensino de matemática que consideram o uso de recursos manipuláveis e tecnológicos. A seguir, apresentam uma descrição comentada da proposta didática e seus objetivos, e finalizam propondo reflexões sobre possibilidades de criação de ambientes de ensino promotores de aprendizagens significativas.

No segundo capítulo, intitulado *Práticas Didáticas Interativas e Avaliativas no Ensino Remoto*, o autor, a partir do Ensino Remoto Emergencial (ERE) que surgiu no ano de 2020 como alternativa para dar continuidade às atividades escolares e, simultaneamente, preservar a saúde de estudantes e docentes, durante a pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2, discute que inicialmente muitos docentes se posicionaram contrários ao ERE porque entendiam que não seria possível fazer ensino remoto de qualidade na educação básica. No entanto, com o passar dos dias e o estudo e a dedicação de milhares de docentes em todo o mundo, foram criados caminhos alvissareiros para a educação frente aos desafios que se apresentaram. Neste texto são apresentadas algumas práticas didáticas desenvolvidas e utilizadas por docentes do Colégio de Aplicação da UFRJ, de forma que o potencial dos recursos digitais fosse demonstrado por meio das avaliações positivas de estudantes, responsáveis, licenciandos e docentes de diferentes disciplinas.

No terceiro capítulo, cujo tema é *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*, a autora espera responder a algumas questões que acredita serem pertinentes a esse tempo da pandemia provocada pelo novo coronavírus, bem como para o futuro, com os ensinos híbrido e remoto. Apresenta um conjunto de questões relacionadas às geometrias não euclidianas (GNE) que podem levar o(a) leitor(a) a pensar não ter ligação com a pandemia. Para responder ao "por quê?" do título, a autora apresenta como entende a criação de novos conhecimentos científicos e as lógicas envolvidas com as ações relacionadas ao pensamento científico que os embasam, à Educação e à Matemática. Para tanto, inicia com uma breve introdução histórica à geometria euclidiana; em seguida, contextualiza como surgiram as GNE e as consequências desse surgimento para as Ciências e para a pandemia. Para responder ao "para quê?" se introduzir as GNEs no Ensino Médio, analisa como o pensamento científico e o ensino das representações matemáticas são apresentados na Base Nacional Comum Curricular, bem como eles se interligam em relação à pandemia; elenca alguns resultados de pesquisas realizadas, no âmbito da formação de professores de Matemática e do livro didático; e finaliza com considerações sobre exemplos de GNE que podem ser utilizados na escola básica.

A fim de contribuir para a apropriação das tecnologias digitais por parte dos professores de matemática e para seu uso com intencionalidade didática, o texto do quarto capítulo, *Problematização dos números reais com recursos da Geometria Dinâmica: Descobrindo lacunas na reta numérica*, introduz um conjunto de atividades educacionais pensadas para a problematização e a aprendizagem dos números reais com o uso de recursos tecnológicos escolhidos de maneira a propiciar uma abordagem interativa e dinâmica do tema.

São três construções eletrônicas, chamadas de *applets*, que favorecem a exploração de importantes orientações didáticas.

Para finalizar, agradecemos à direção do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – Campus Nilópolis pelo apoio dado a esse projeto de extensão por meio de fomento oriundo do edital interno nº 11.

Capítulo IV

Problematização dos números reais com aplicativos: Descobrindo lacunas na reta numérica

Recebido em: 15/07/2021
Aceito em: 25/08/2021
10.46420/9786581460372cap4

Daniela Mendes Vieira da Silva[1*]
Darling Domingos Arquieres[2]
Ion Moutinho[3]

INTRODUÇÃO

Estudos como Barbosa (2012, 2014), Brandão (2005) e Paranhos (2005) apontam que recursos das tecnologias digitais ainda são pouco explorados no processo de ensino e aprendizagem de matemática, no contexto escolar. A fim de contribuir para a apropriação dessa tecnologia por parte dos professores de matemática e para seu uso com intencionalidade didática, o presente artigo introduz um conjunto de atividades educacionais pensadas para a aprendizagem dos números reais com o uso de recursos tecnológicos escolhidos de maneira a propiciar uma abordagem interativa e dinâmica do tema. São três construções eletrônicas, chamadas de *applets* (pequeno programa que executa uma atividade específica, dentro de outro programa maior), que favorecem a exploração de importantes orientações didáticas.

Adiante apresentamos uma revisão a respeito do conjunto dos números reais e os principais aspectos que o diferenciam do conjunto dos números racionais, e explicamos em mais detalhes o tipo de problematização que escolhemos para justificar a extensão dos números racionais para os reais. Na sequência descrevemos os objetivos específicos.

Ambos os conjuntos numéricos, dos reais, R, e dos racionais, Q, possuem a mesma estrutura algébrica básica. Em termos matemáticos formais, os dois conjuntos possuem a estrutura de corpo ordenado, isto é, satisfazem as mesmas propriedades básicas envolvendo as operações aritméticas de adição e multiplicação e envolvendo a noção de ordem. Assim, propriedades como $ax = b \Rightarrow x = b/a$, quando $a \neq 0, e\ a < b \Rightarrow a + c < b + c$ são verdadeiras tanto no contexto dos números racionais quanto no dos números reais. Isso quer dizer, por exemplo, que o tratamento para resolver a

[1] Secretaria Estadual de Educação do estado do Rio de Janeiro.
[2] Secretaria Estadual de Educação do estado do Rio de Janeiro.
[3] Departamento de Análise, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense.
[*] Daniela Mendes Vieira da Silva: danielamvds@yahoo.com.br

equação $3x = 5$ ou a equação $\sqrt{2}x = 5$, a fim de isolar x, é o mesmo, não importa a natureza do número, se é racional ou irracional.

A analogia entre os conjuntos Q e R não funciona plenamente, é só lembrar, por exemplo, que a equação $x^2 = 2$ não tem solução em Q, mas tem em R. Além de diferenças sutis com relação às propriedades algébricas, existe outro aspecto que distingue de modo bem mais marcante o conjunto R do conjunto Q, o aspecto topológico. Em termos matemáticos formais, diz-se que R é mais precisamente um corpo ordenado completo. A explicação matemática para o termo completo é um tanto técnica para os propósitos do presente artigo. Evitando o formalismo matemático, podemos pensar que a completeza − alguns autores usam o termo completude − dos números reais se refere à existência de uma correspondência do conjunto com todos os pontos da reta numérica. Ou ainda, podemos pensar que R é o corpo ordenado completo que estende Q e completa o preenchimento de toda a reta numérica. Inclusive, é justamente esse aspecto topológico que garante a existência da solução para a equação $x^2 = 2$, o irracional $\sqrt{2}$, ou a existência de medidas como a da circunferência de diâmetro 1, o irracional π. A completeza também garante que R não é enumerável, ou contável, mais uma diferença com relação ao conjunto Q. Em linguagem mais precisa, a cardinalidade do conjunto dos números reais é maior do que a do conjunto dos números racionais. Em linguagem não tão precisa, o infinito dado pelo total de elementos de R é maior do que o de Q.

Comungamos com a ideia de que o ensino dos números reais deva ser precedido pela problematização da extensão dos números racionais a partir de situações-problema onde o conhecimento destes não seja suficiente para a obtenção de uma solução. Torna-se central, então, estabelecer quais seriam as situações-problema adequadas para esse objetivo.

Um tipo de situação-problema que pode mostrar a necessidade de ampliação dos números racionais é dado por problemas envolvendo equações algébricas. Problemas como o de encontrar a solução de $x^2 = 2$, ou variações algébricas deste, leva a uma enorme coleção de números irracionais, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$ ou $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (esta última é a expressão algébrica do famoso número de ouro φ, raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$). Mesmo sendo importantes, principalmente para a explicação de que esses objetos não representam números racionais, problemas algébricos desse tipo não são suficientes para a obtenção de todos os números irracionais. O número π é um exemplo.

Lembrando que é a propriedade de ser completo que diferencia o conjunto R do conjunto Q, estamos considerando que a problematização da extensão de Q envolve principalmente situações-problema relacionadas com a ideia de marcação ao longo de toda a reta numérica, e que aborda o fato de que os números racionais não conseguem cobri-la. Cabe destacar um obstáculo existente em tarefas de marcação na reta numérica, ou de medição. De modo geral, não existe como saber se determinada representação numérica ou na reta numérica corresponde a um número racional ou não, a não ser por argumentação formal. Por exemplo, em uma atividade de marcação, digamos que com régua e compasso em uma folha de papel, da diagonal do quadrado de lado 1 na reta numérica, não tem como saber só pela marca obtida, ou pelo processo de construção realizado, se esta corresponde a um número racional.

Lançando mão do teorema de Pitágoras, por exemplo, até podemos obter uma representação algébrica para a diagonal, a saber, $\sqrt{2}$. E ainda assim, só olhando esta representação não temos como saber se a marca corresponde a uma fração de números inteiros ou não. Até onde sabemos, a comprovação, ou mesmo o reconhecimento, de que a diagonal do quadrado de lado 1 não corresponde a nenhum número racional é dada por um argumento formal, normalmente envolvendo um método de prova conhecido como prova por contradição, ou redução ao absurdo.

Só para reafirmar essa ideia, lembramos que a constatação de que o número π não é um número racional só ocorreu no século XVIII, devido a Johann Heinrich Lambert, mesmo sendo conhecido e até utilizado desde as civilizações antigas, como a dos egípcios e dos babilônios. Foram mais de três mil anos até se encontrar uma explicação definitiva para o fato de que a medida de π não corresponde a nenhum número racional.

Este estudo se justifica pois ele mostra uma abordagem diferenciada do ensino tradicional dos números reais presente em livros didáticos em geral e, por conseguinte, presente também nas salas de aula, uma vez que os livros didáticos são o material de apoio mais utilizado pelos professores (Gomes et al., 2014).

A abordagem encontrada em diversos livros didáticos de Matemática em relação ao ensino de números reais aponta comumente que os números racionais são aqueles que podem ser escritos em forma de fração com denominador e numerador inteiros e denominador diferente de zero, que todo número que não é racional é irracional e que a reunião dos números irracionais e racionais compõe o conjunto dos números reais (Ripoll et al., 2016). O estudo de González-Martín et al. (2013) a respeito da introdução dos números reais no ensino escolar apresenta uma visão relativamente ampla de como os livros didáticos brasileiros lidam com a questão.

Segundo resultados obtidos, livros didáticos começam fornecendo definições e propriedades articuladas como conhecimentos de listas de regras sem justificativas e como procedimentos a serem sabidos. Em particular, problemas que motivaram a expansão do conjunto dos números racionais ou que justifiquem a necessidade dos novos conceitos não são trabalhados nesses materiais instrucionais. A abordagem algébrica é dominante e a maioria das tarefas requer a simples reprodução de técnicas. Um problema nesse quadro descrito é que, como veremos na próxima seção, a abordagem algébrica é insuficiente para justificar a criação de todo o conjunto dos números reais.

Considerando os aspectos matemáticos expostos a respeito dos números reais e o compromisso didático de problematizar o conceito a ser introduzido antes da sua formalização, concluímos esta seção apresentando as intenções didáticas e matemáticas que nos guiaram no presente trabalho. A saber, visando o questionamento das limitações dos números racionais para problemas de medição, ou marcação na reta numérica, procuramos desenvolver atividades didáticas que pudessem levar um educando a fazer questionamentos como os seguintes.

- É possível estabelecer uma correspondência entre todos os pontos da reta e os números racionais?
- Números obtidos por outros meios que não sejam diretamente pela fração de inteiros podem ser representados na reta numérica? Podem ser medidos pelos números racionais?
- Qualquer segmento de reta pode ser medido pelos números racionais?

Portanto, o objetivo geral do presente estudo é o de apresentar uma sequência comentada de atividades para a construção dos números reais relacionando-os à completeza da reta real.

Como objetivos específicos temos:

- Fazer uma discussão teórica sobre a completeza da reta real.
- Selecionar e apresentar *applets* gratuitos que facilitem a construção da completeza da reta real.
- Discutir a utilização dos *applets* supracitados para a construção da completeza da reta real.

Este estudo está estruturado nesta introdução, em uma seção de materiais e métodos, em uma sessão de apresentação de uma sequência de atividades propostas e comentadas, em considerações finais e em referências bibliográficas.

MATERIAIS E MÉTODOS

Por materiais nos referimos aos três *applets* que serão explorados aqui como uma ferramenta didática de mediação. Por métodos nos referimos a estratégias e orientações que tornarão os *applets* um material didático. Iniciamos apresentando os referenciais teóricos que inspiraram o método de utilização dos *applets* como uma ferramenta de mediação na construção de conhecimentos sobre os números reais. Considerando que a nossa proposta é a de trabalhar com alunos em um ambiente computadorizado dinâmico e considerando o objetivo de problematizar a introdução de um conceito a ser introduzido, nos referimos a Arcavi et al. (2000) e a Duval (2003).

Arcavi et al. (Ibidem) destacam alguns componentes importantes para atividades didáticas que antecipem a formalização de conhecimentos matemáticos, a saber, visualização, experimentação, surpresa e *feedback*. Vejamos mais detalhes sobre essas quatro características.

Em ambientes computadorizados dinâmicos encontramos recursos que facilitam a representação e visualização das informações envolvidas em uma dada situação-problema. Mais ainda, existem recursos que permitem transformar objetos construídos em tempo real, o que facilita a descoberta de relações que se destacam ao permanecerem invariantes por tais transformações. Na verdade, ambientes dinâmicos assim oferecem recursos para diversos tipos de testagens e verificações dos diversos exemplos produzidos, como medição, comparação, deformações de figuras e mudanças de configurações. É a possibilidade real de se experimentar em Matemática. Experiências, principalmente em Matemática, não podem ser usadas para justificar uma afirmação, mas são importantes para dar suporte na formação de conjecturas ou podem ajudar a produzir um exemplo que eventualmente refute determinada conjectura.

Ainda segundo Arcavi et al. (Ibidem), ambientes computadorizados dinâmicos também têm o potencial de promover surpresas com relação às previsões feitas pelo aluno para a situação-problema considerada e de fornecer um feedback referente às ações de testagem realizadas pelo aluno. Porém, os autores fazem ressalvas importantes com relação ao planejamento das atividades didáticas envolvendo tal ambiente virtual. Em primeiro lugar, é importante pedir que alunos façam previsões explícitas e ponderadas a respeito da exploração a ser realizada no ambiente computadorizado. Depois, é interessante planejar cenários, isto é, configurações para os objetos matemáticos envolvidos e representados no ambiente computadorizado, de tal maneira que o aluno possa ser surpreendido de alguma forma, com relação às previsões feitas inicialmente. A ideia é que resultados inesperados despertem no aluno o interesse em um novo exame de seus conhecimentos e suposições. E para que o aluno seja surpreendido, é importante que ele tenha um *feedback* de suas ações e dos resultados obtidos delas. Ou seja, o cenário projetado para o ambiente computadorizado deve levar em consideração esses aspectos. Cabe notar que esse tipo de ambiente se destaca por possibilitar um *feedback* imediato.

Também consideramos orientações de Duval (2003) e entendemos que a construção de conhecimentos matemáticos depende de três tipos de ações ligadas à representação do objeto matemático: o próprio ato de representar o objeto matemático em questão; tratar a representação obtida dentro de um dado sistema de representação; e converter a representação para um outro sistema de representação.

A representação de um objeto matemático pode se referir a uma das seguintes modalidades de representação: símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos ou desenhos. O termo, sistema de representação, se refere a uma dessas modalidades como um conjunto de registros de representação. Por exemplo, podemos representar a unidade dividida em três partes por 1/3 ou 0,333..., também podemos recorrer a uma representação geométrica, por exemplo, na reta numérica. Quando realizamos a transformação 1/3 = 2/6, fizemos um tratamento, e, quando realizamos a transformação 1/3 = 0,333..., fizemos uma conversão.

Segundo Duval (Ibidem), a realização das transformações do tipo conversão é necessária para a compreensão de conceitos matemáticos.

Os três *applets* são "Cobrindo um segmento com frações"*, "Raiz de 2 é racional?"** e "MusiCalcolorida"***. A partir de agora vamos nos referir a eles como *applet* 1[2], *applet* 2 [3]e *applet* 3[4], respectivamente.

Cada *applet* será descrito em mais detalhes na próxima seção (vale a pena conferir as figuras 1, 2 e 3 antes de continuar a leitura), mas por hora vamos destacar algumas características gerais dos três aplicativos e o método geral de uso deles.

O primeiro ponto é considerar a acessibilidade proporcionada pelo *applet* de trabalho, o que ele proporciona ao usuário. Os três *applets* que estamos estudando são bastante intuitivos, pois possuem uma boa visualização das informações a serem trabalhadas e são de fácil interação.

Outra questão importante é saber se o *applet* de trabalho presta bem para os objetivos matemáticos, ou seja, a propriedade ou conceito que o professor que trabalha com os alunos. No nosso caso, nenhum dos três *applets* apresenta qualquer relação explícita com nosso assunto, números reais. Só o *applet* 2 exibe uma representação da reta numérica com a indicação de somente três números, 0, 1 e $\sqrt{2}$, isso parece ser muito pouco. Contudo, essa característica dos três *applets* não é determinante, pois cada *applet* apresenta um sistema de representação que pode ser correspondido com um sistema de representação simbólico para os números reais e que tem grande apelo intuitivo. As *applets* 1 e 2 remetem a ideia de números reais corresponderem a pontos da reta, enquanto o *applet* 3 remete a ideia de padrão e ritmo, apelos intuitivos interessantes para a classificação dos tipos de dízima numérica.

De posse de um *applet* e de um objetivo matemático, o próximo passo é estabelecer uma pergunta interessante, que não seja um problema rotineiro e que possa levar o aluno a surpresas. Pode ser

[2] https://www.geogebra.org/m/eW9MfdWv.

[3] https://www.geogebra.org/m/ewRQGAAP.

[4] http://matematicainclusiva.net.br/aplicativo.php.

interessante apresentar a pergunta ao aluno mostrando como a questão se relaciona com o *applet* de trabalho.

Após a pergunta ser apresentada, deve-se pedir para o aluno fazer uma previsão sobre a questão e ponderar sobre ela. É importante pedir para o aluno registrar sua resposta e ponderações, por escrito ou explicando para o professor. Inclusive, isso pode ser uma oportunidade para avaliar como o aluno administra seus conhecimentos sobre o assunto trabalhado. A atividade de exploração do *applet* deve começar a partir desse momento. A ideia é inserir dados variados e utilizar todos os recursos de interatividade. A facilidade na representação e visualização de conceitos relacionados aos números reais deve produzir boas surpresas para o aluno.

Acabamos de apresentar um resumo do roteiro de trabalho com *applets* que estamos sugerindo. Antes de passarmos para a próxima seção, onde iremos dar mais detalhes a respeito dessas ações descritas, enfatizamos que ao longo de todo o processo é fundamental que o professor faça a mediação das ações de representação que serão necessárias a todo momento. Vejamos todas essas questões em mais detalhes a seguir.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES PROPOSTAS E COMENTADAS

Apresentamos e comentamos aqui uma sequência de atividades que abordam a completude do conjunto dos números reais utilizando, para tanto, recursos tecnológicos de uso livre e gratuito.

A primeira prática pretende fazer com que o participante compreenda que o conjunto dos racionais, embora denso (uma vez que entre dois números racionais sempre é possível interpor um outro número racional), não é suficiente para cobrir toda a reta real. O *applet* 1 é o aplicativo utilizado para essa prática. A pergunta que elaboramos para motivar o estudo com alunos é a seguinte.

Questão: É possível preencher completamente o segmento entre 0 e 1 da reta numérica com números racionais? Explica como pensou sobre o assunto.

Entendemos que a questão apresentada não é do tipo problema rotineiro. Isto é, a resolução do problema colocado dificilmente se dará pela substituição de dados em um problema genérico já resolvido anteriormente. Consequentemente, o aluno precisará administrar seus conhecimentos sobre o assunto em questão, quando lhe for pedido para ponderar e se posicionar a respeito da pergunta colocada.

De acordo com a dinâmica estabelecida na seção anterior, é importante deixar o aluno explicar como ele pensou sobre a pergunta colocada e lembrar que ele precisa trabalhar, provavelmente mediado pelo professor, a conversão entre diferentes sistemas de representação. Por exemplo, o professor pode orientar o aluno a visualizar a reta numérica olhando os pontos A e B como pontos desta reta, com A representando o zero e B representando o 1. Aí, fazendo $n = 3$, pode pedir para o aluno dizer que números estariam representados pelos dois pontos que surgiriam na tela, entre A e B. Pode acontecer do aluno pensar na resposta em termos de representação decimal (isso é muito comum) e, nesse caso, ele pode apresentar dificuldades em estabelecer uma resposta. Já aconteceu, em uma vivência com alunos do 8º ano do ensino fundamental, de um dos alunos responder 0,3 e 0,7, quando ele se baseou no aspecto visual e na proporção dos espaços entre pontos. Nesse momento o professor orientou o aluno a pensar em termos de frações, a resposta 1/3 e 2/3 foi imediata. É interessante usar esse momento para avaliar a preferência dos alunos entre as representações decimal e fracionária para os números racionais.

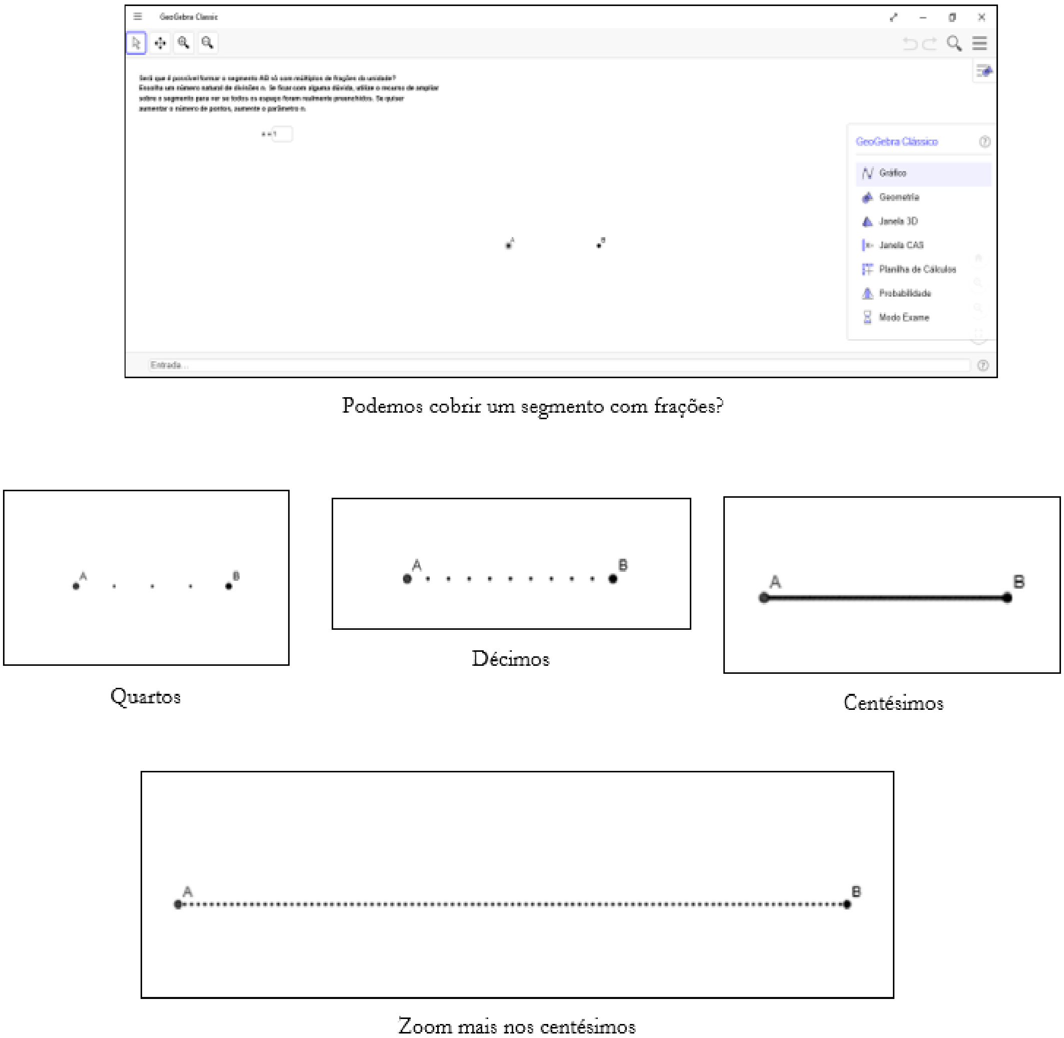


Figura 1. Cenários obtidos do *applet* 1 com diferentes entradas de valores. Fonte: Os autores.

Ainda sobre a questão de associar a representação intuitiva de pontos e segmento de reta do *applet* 1 com o conceito matemático de números reais e de promover representações semióticas e conversões entre diferentes sistemas de representação, às vezes alunos podem necessitar de um recurso mais tangível que o aplicativo eletrônico. Nesse caso, o professor ainda pode usar o *applet* 1 ao seu favor relacionando-o com uma régua, pois podemos fazer analogias entre os pontos obtidos para n = 10, 100 ou 1000, com unidades de medida como decímetro, centímetro e milímetro. E neste caso podemos trabalhar com as representações decimais.

Vejamos mais sobre as funcionalidades do *applet* 1. Podemos escolher o denominador das frações que "cobrirão" o segmento AB atribuindo diferentes valores para n. Veja, por exemplo, que, se o denominador em questão for pequeno, não é possível cobrir o segmento (se o *zoom* não for alterado[5]). Tome-se $n = 4$, por exemplo (figura 1), observe que com quartos não se consegue cobrir o segmento. Veja abaixo o que ocorre com décimos (figura 1), observe que com décimos ainda não se consegue cobrir o segmento, mas que eles preenchem melhor o segmento do que os quartos. Isto pode levar o seu estudante a pensar que talvez com centésimos seja possível cobrir o segmento. Observe o que acontece quando centésimos são usados (figura 1), o segmento AB parece "preenchido" com centésimos, mas que basta dar um *zoom* mais no segmento para se observar que "buracos" apareceram nele (Figura 1).

Isto continuará acontecendo ainda que sejam utilizados valores cada vez maiores para o denominador das frações (gerando frações cada vez menores portanto) com as quais "intenta-se" "cobrir" o segmento (sempre mantendo esta dinâmica de partir do último zoom mais, fazendo parecer que o segmento foi coberto, o que se desfaz ao se aplicar mais um *zoom* mais).

Em uma turma de segunda série do ensino médio, na qual a primeira autora deste artigo leciona, os estudantes se dividiram em suas observações sobre ser ou não possível preencher o segmento com frações, uma vez que muitos deles haviam decorado que a reta real era completa e composta de números racionais (os quais podem ser escritos em forma de fração) e irracionais (os quais não podem ser escritos em forma de fração).

O *applet* 1 mostrava, utilizando conversões entre representações numéricas e visuais, que aparentemente era possível cobrir o segmento de reta em questão apenas com frações e o *zoom* mais mostrava que não importava quão grande era o denominador, e, portanto, quanto menores fossem as frações e seus múltiplos, que não era possível preencher o segmento de reta completamente. O uso do *zoom* mais para mostrar que havia "buracos" suscitou dois tipos de reação, para os estudantes que esperavam que não fosse possível tal preenchimento, o surgimento dos buracos se mostrou um momento de grande alívio, pois confirmava o que eles haviam decorado e a segunda reação foi a de surpresa para

[5] Destacamos aqui que é possível utilizar a tecla *zoom* menos até que o segmento pareça completamente preenchido.

os estudantes que não estavam esperando os "buracos" porque acreditavam ser suficiente cobrir o segmento de reta em questão com frações cada vez mais próximas de zero.

Esta divisão de expectativas ocorreu não só nesta turma de segundo ano, mas também em oficinas com o tema construção de números reais dadas pela primeira autora e, também, em suas aulas no ensino superior. Porém, tanto nas oficinas quanto no ensino superior, os participantes/estudantes se calçavam fortemente na definição de fração (uma fração é um número do tipo a/b com a e b inteiros e b diferente de zero) e foi preciso destacar que o *applet* 1 pode auxiliar o educando a compreender que racionais e irracionais têm diferentes naturezas. Este *applet* auxilia, ao coordenar diferentes representações, como previsto por Duval (2003), portanto, o educando a entender que os números racionais não dão conta de preencher o segmento e, por extensão, toda a reta Real. É esta ideia que implica na seleção do próximo *applet* a ser apresentado.

A segunda prática pretende revelar a existência de números com uma natureza diversa à natureza dos números racionais, ou seja, aqui pretende-se que o aluno compreenda que os "buracos" que apareceram na prática anterior são preenchidos por números que não são racionais, ou seja, pelos números irracionais. Esse tema é trabalhado com apoio do *applet* 2 (figura 2). Observe que o segmento raiz quadrada de dois é a diagonal do quadrado de lados iguais a um e sua medida foi calculada a partir do Teorema de Pitágoras[6]. Este segmento foi transportado para a reta numérica com a ferramenta compasso do GeoGebra e é neste segmento transportado que trabalhamos.

Para o *applet* 2 a sugestão é colocar a seguinte questão de trabalho.

Questão: É possível medir a diagonal do quadrado de lado 1 com frações?

O *applet* 2 trabalha, utilizando simultaneamente representações numéricas e visuais, com uma unidade de medida escolhida coincidindo com a medida do lado do quadrado. A ideia aqui é criar frações a partir da nossa unidade de medida um, ou seja, do tipo 1/n (n pertencente aos naturais) e, com múltiplos dela do tipo m/n (m e n pertencentes aos naturais), poder medir o segmento raiz quadrada de dois estabelecendo uma correspondência entre m/n e a raiz quadrada de dois. Novamente, é possível relacionar o uso deste *applet* com o instrumento mais tangível, a régua. Agora, é extremamente interessante notar que a medição com régua ocorre por decimais (ou frações decimais, se quisermos converter para frações). Isso é notável, pois a medição por frações pode gerar resultados melhores sem precisar recorrer a números tão grandes. Vamos explicar melhor essa diferença mais adiante.

[6] O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Link para demonstração deste Teorema aqui: https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geometry-pythagorean-theorem/basic-geometry-pythagorean-proofs/v/pythagorean-theorem-proof-using-similarity

Como exemplo, para explicar melhor o funcionamento do *applet* 2 mostramos a divisão da unidade de medida um por cinco, obtendo-se quintos, observe na figura abaixo (figura 2) que 7/5 se aproxima muito da raiz quadrada de dois, mas não coincide exatamente.

Observe que se décimos forem usados, ou seja, usando-se n = 10, buscando-se a correspondência procurada encontra-se a seguinte situação (figura 2) e observa-se que 14/10 se aproxima muito da raiz quadrada de dois, mas não coincide exatamente. Se quisermos fazer aqui a analogia com a régua, podemos dizer para o aluno que o resultado da medida seria 1,4 unidades (poderia ser centímetros, se usássemos a convenção de que o quadrado tem lado medindo 1 cm).

Observe que se centésimos forem usados, ou seja, para n = 100, buscando a correspondência procurada, encontra-se a seguinte situação (figura 2) e observa-se que há um múltiplo de 1/100 do tipo m/100 que parece coincidir com raiz quadrada de dois (figura 2). Porém basta dar *zoom* mais para perceber-se que tal correspondência não se estabelece (figura 2). Na analogia com o uso de régua, contando os pontos na tela a partir da marca de 1, teríamos que 1,41 seria a melhor aproximação da diagonal, em centésimos.

A medição por frações pode ser bastante curiosa, principalmente se comparada com a medição com régua (com decimais). O leitor pode verificar, visitando o *applet* 2, que podemos obter aproximações excelentes para a raiz quadrada de 2 com números relativamente pequenos. Fazendo n = 12 encontramos uma aproximação melhor do que com n = 100, é a fração 17/12. Esta é uma medida mais precisa do que 1,41. Com n = 17 obtemos uma medida ainda mais precisa, podemos verificar visualmente, no *applet*, que 7/17 está mais próximo da marca de $\sqrt{2}$ do que 17/12. Já a fração 99/70 oferece uma medição notável. Já aconteceu de licenciandos em Matemática passarem a acreditar que a raiz quadrada de 2 pode ser medida por uma fração, após a visualização desse resultado. É uma medida mais precisa do que fazendo n = 1000, quando o resultado tem precisão de milésimos.

Ainda que se faça mais algumas tentativas com denominadores mais variados e que se repita o processo de dar *zoom* mais o que se observará é que sempre faltará algo para que a correspondência esperada se estabeleça. Isto pode levar o seu estudante a intuir que não seria possível tal correspondência e para consolidar esta percepção, você pode fazer a demonstração de que raiz quadrada de dois não é racional[7] com o intuito de levar seus alunos a compreenderem que existem, dentro dos números reais, números de duas naturezas, ou seja, os números racionais e os números irracionais. Portanto, a reunião dos números racionais aos irracionais perfaz o conjunto dos números reais e preenche a reta numérica,

[7] Disponível em: https://pt.khanacademy.org/math/algebra/rational-and-irrational-numbers/proofs-concerning-irrational-numbers/v/proof-that-square-root-of-2-is-irrational

uma vez que com racionais e irracionais é possível estabelecer uma relação biunívoca[8] entre cada ponto da reta numérica e cada número real.

Em uma turma de segunda série do ensino médio, na qual a primeira autora deste artigo leciona, os estudantes, ao explorarem o *applet* 2 já estavam esperando que a medição do segmento de comprimento raiz quadrada de dois com números racionais recaísse em um "buraco" quando se aplicasse *zoom* mais nesta ferramenta.

Ao serem perguntados sobre o motivo pelo qual eles esperavam tal coisa, os estudantes se dividiram em duas correntes, a saber. A primeira contava que haveria um "buraco" porque isto já havia acontecido na prática anterior e a segunda percebeu que estávamos tentando alcançar um número que não poderia ser escrito em forma de fração com uma fração e que tal medida seria impossível de maneira exata.

Em oficinas de formação de professores e em aulas na graduação e pós graduação em disciplinas de instrumentação de ensino de Matemática os participantes/estudantes já esperavam que tal "buraco" ocorresse e até mesmo houve quem se lembrasse da demonstração de que raiz quadrada de dois é irracional e destacasse que o *applet* 2 em questão seria interessante para trabalhar a incomensurabilidade entre racionais e irracionais. Veja que o uso de diferentes representações auxilia na apreensão do conceito, uma vez que na reunião das representações numéricas e visuais a diferente natureza de números racionais e irracionais é explicitada, isto ocorre quando não é possível medir um pelo outro e o *applet* 2 permite esta inferência ao indicar dinamicamente que tal medida é impossível.

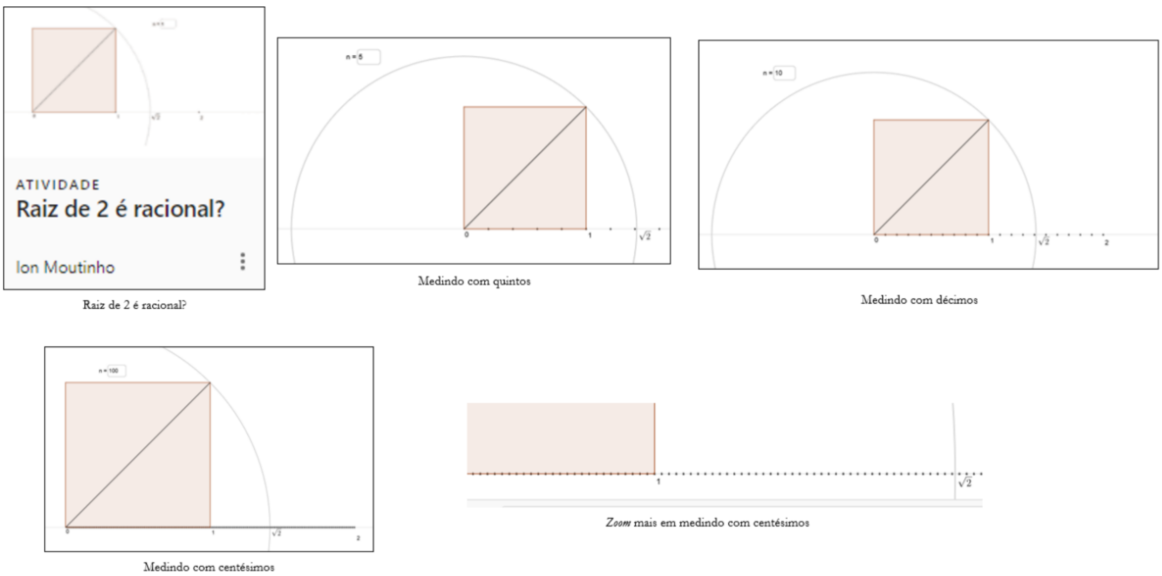


Figura 2. Cenários obtidos do *applet* 2 com diferentes entradas de valores. Fonte: Os autores.

[8] Que estabelece uma correspondência entre dois conjuntos, sendo que cada elemento de um conjunto está somente associado a um, e só um, elemento do outro: relação biunívoca (https://abre.ai/c4Tv).

Com o *applet* 3 pretende-se consolidar as discussões sobre números racionais e irracionais visualizando a representação decimal desses números de forma multissensorial. Neste micromundo os cálculos que resultam em números com expansão decimal, seja ela finita ou infinita, estão no centro dos interesses, uma vez que a calculadora associa à cada número das expansões decimais, que são resultado de operações feitas na sua calculadora integrada, cores (0-branco, 1-lilás, 2-azul escuro, 3-azul claro, 4-verde escuro, 5-verde claro, 6-amarelo, 7-laranja, 8-vermelho claro e 9- vermelho escuro) e notas (0 -dó, 1 – ré, 2 – mi, 3 – fá, 4 – sol, 5 – lá, 6 – si, 7 – dó, 8 – ré, 9 – mi.). Observe o que acontece quando dividimos 35789 por 100000 (figura 3).

Veja que o número 3 é representado pelo bloco azul claro, o número 5 é representado pelo bloco verde claro, o número 7 é representado pelo bloco laranja, o número 8 é representado pelo bloco vermelho claro e o número 9 é representado pelo bloco vermelho escuro. Já as notas associadas são 3 – fá, 5 – lá, 7 – dó, 8 – ré, 9 – mi.

Destacamos aqui que o uso da calculadora fica mais interessante quando operamos com dízimas periódicas, uma vez que tanto a visualização em blocos coloridos da sua expansão decimal quanto a audição das notas associadas à sua expansão decimal apontam para um padrão periódico. Vejamos, por exemplo, o que acontece quando dividimos 647/999 (figura 3).

Observe que um padrão periódico é imediatamente desenhado quando fazemos a operação supracitada, o que permite uma visualização imediata da periodicidade da expansão decimal. Este é um excelente momento para discutir que uma dízima periódica é uma fração, veja que uma fração (647/999) originou esta dízima periódica (0,647647647647...) que estamos observando na figura 3. Cabe aqui discutir com os seus alunos que uma dízima periódica se constitui como tal porque, como estamos trabalhando com a divisão de um inteiro a por outro b (b diferente de zero) resultando em um quociente q, a quantidade de restos de uma divisão é limitada a b 1 para um divisor b qualquer (exceto zero), ou seja, em algum momento um resto irá se repetir e os restos subsequentes irão se repetir o que repercute na expansão decimal do quociente q da divisão[9]. Clicando na clave de sol do micromundo você também pode ouvir este padrão periódico, pois as notas se repetem uma vez que a cada número é atribuída uma nota e como os números se repetem periodicamente também as notas se repetirão periodicamente formando um padrão periódico possível de ser ouvido.

Também é importante destacar o uso deste micromundo para discutir a não periodicidade da expansão decimal de um número irracional, observe que é possível existir números irracionais com

[9] A demonstração deste fato pode ser encontrada em http://abre.ai/bmuq

padrões não periódicos, 0,01001000100001... é um exemplo. Inclusive, vemos aqui uma oportunidade de enfatizar certos conhecimentos a respeito dos números racionais. Não é incomum um aluno se prender ao termo padrão para identificar um número racional. A discussão sobre os diferentes tipos de padrão e a identificação destes por meio de visualização parece ser uma ótima oportunidade para realçar a caracterização dos números racionais pela representação decimal.

O micromundo MusiCalcolorida oferece a possibilidade de se trabalhar com a raiz quadrada de 2 e infelizmente, embora tenha o botão, não oferece a possibilidade de trabalharmos com pi devido a um defeito do projeto. Também é importante salientar que o micromundo tem limitações, uma vez que ele mostra, no máximo, 5000 casas de uma expansão decimal, e no caso de uma dízima periódica com períodos maiores que 5000 casas teríamos a impressão de se tratarem de dízimas não periódicas devido à limitação do micromundo. Entretanto, o micromundo é muito eficiente para dízimas periódicas com períodos mais curtos, por exemplo. Voltando ao número irracional raiz quadrada de dois, ao inserir a operação raiz quadrada de dois obtemos a tela abaixo (figura 3).

Observe que visualmente já é possível perceber a falta de padrão periódico da expansão decimal de raiz quadrada de dois. Também, clicando-se na clave de sol, é possível perceber a falta de padrão periódico quando as notas associadas aos números da expansão decimal em foco são tocadas.

Este micromundo é uma opção, portanto, para explorar a natureza dos números racionais e irracionais em uma perspectiva multissensorial consolidando as primeiras duas atividades vivenciadas. Vale a pena destacar que este micromundo foi projetado para o trabalho com alunos com deficiência visual e auditiva, mas que ele pode ajudar a todos os que se interessarem em utilizá-lo.

Em um curso de extensão no qual a primeira autora deste artigo leciona, os cursistas ficaram muito desconfortáveis quanto ao caos observado na expansão periódica dos irracionais algébricos raiz quadrada de dois e raiz quadrada de três, foi visível que o caos visual e auditivo os incomodou, tal incômodo não ocorreu quando os racionais foram representados, foi perceptível que os cursistas ficaram confortáveis com os padrões musicais e visuais periódicos. As múltiplas representações auxiliaram de fato os participantes a compreenderem as diferentes naturezas dos números racionais e dos números irracionais, como previsto por Duval (2003), já que os cursistas puderam compreender melhor os conceitos ao fazer as conversões entre as representações numéricas, musicais e visuais, associando os racionais à reconfortantes padrões periódicos e os irracionais à desconfortáveis mosaicos e sons caóticos. Este comportamento tem se repetido em oficinas de formação de professores e em disciplinas de instrumentação para o ensino de Matemática no ensino superior nos quais a primeira autora deste estudo atua.

Já em uma turma de segunda série do ensino médio na qual a primeira autora deste artigo leciona, o que chamou a atenção dos estudantes foram justamente os padrões periódicos e o fato de que uma dízima periódica tem uma fração geratriz e é um número racional. A coordenação entre representações numérica, visual e sonora foram fundamentais para a compreensão da dízima periódica como sendo um número racional.

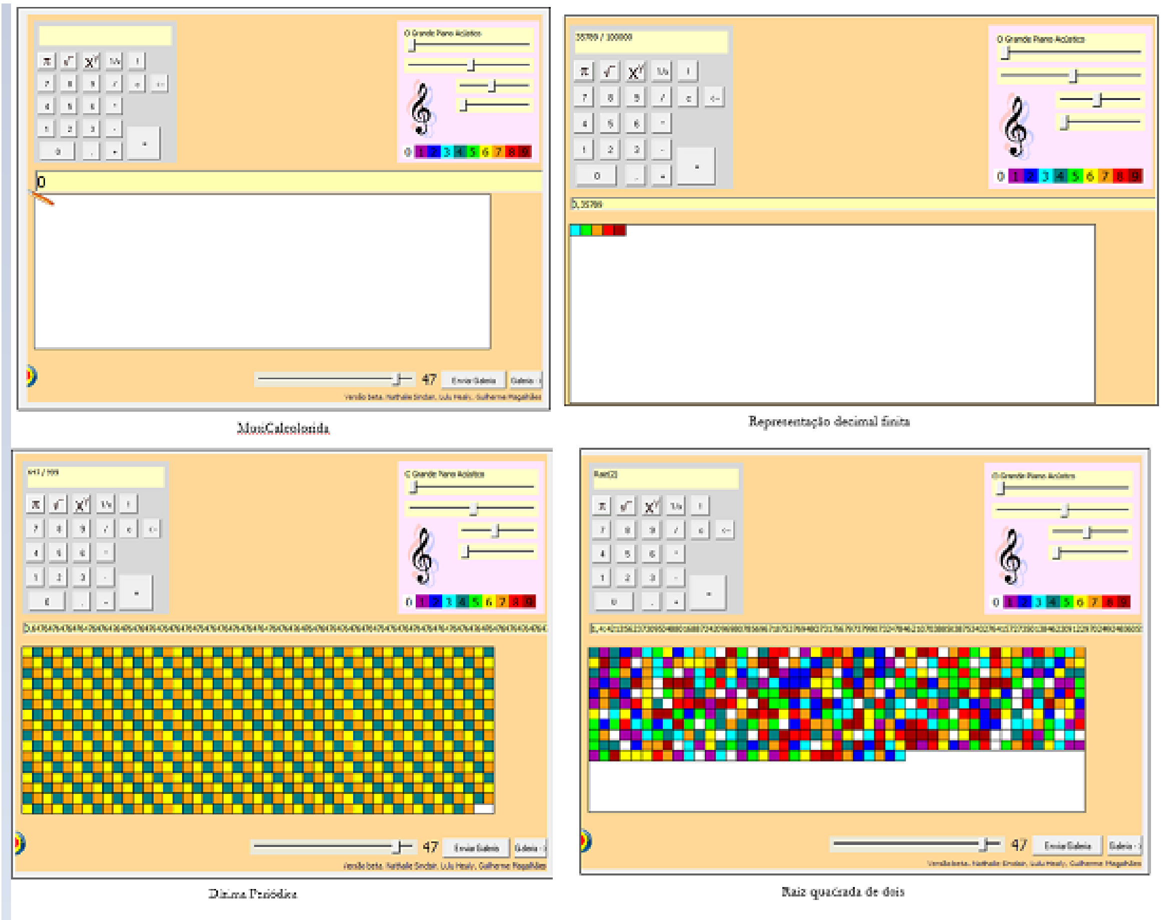


Figura 3. Cenários obtidos do *applet* 3 com diferentes entradas de valores. Fonte: Os autores.

Apresentamos três sugestões de questão não rotineira para motivar um estudo introdutório para os números reais mediado pelo *applet* 3, de acordo com as ações explicadas aqui.

Questão: Sabemos que todo número obtido pela calculadora gera uma sequência de cores. Será que toda sequência de cores pode ser obtida de uma fração de inteiros?

Questão: Toda sequência de cores produzida pela calculadora tem padrão periódico?

Questão: Todo padrão de cores pode ser obtido de uma fração de inteiros?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos aqui a questão de problematizar a introdução do conceito de números reais a partir da constatação de limitações do conjunto dos números racionais, algo que não costuma ser considerado em livros didáticos, segundo pesquisas. Utilizando três *applets* gratuitos e orientações didáticas apropriadas, vimos como a tecnologia digital pode ser utilizada como recurso de mediação a fim de promover uma discussão ampla sobre o tema, números, e esgotando propriedades a respeito dos números racionais. A proposta didática, além de motivar a extensão do conjunto dos números racionais para os reais, apresenta a oportunidade de o aluno administrar seus conhecimentos sobre os números racionais em situações não rotineiras e de o professor avaliar tais conhecimentos. Nossas vivências têm mostrado que a abordagem parece servir também para o aluno rever e ampliar seus conhecimentos sobre os números racionais. Um exemplo são as possíveis discussões em torno da determinação de padrões nas dízimas numéricas, pois nem todo padrão é de repetição periódica, isto é, nem todo padrão na dízima determina um número racional.

Outro aspecto revelado por vivências as sequências didáticas introduzidas aqui é o potencial desse recurso tecnológico para promover uma aprendizagem ativa e colaborativa. A divergência de posições demonstrada por alunos de modo geral e a facilidade de produção de exemplos, e visualização destes, os *applets* possibilitam boas discussões em sala. A facilidade de produção de exemplos parece favorecer a inserção do aluno como ator responsável pela sua aprendizagem, e o professor mediar esse processo estimulando a todo momento a participação do aluno. Também percebemos que as diferentes visões e experiências relatadas por diferentes alunos, ao longo do processo de ensino, parecem contribuir para que alunos aprendam com os seus pares. Essas são apenas algumas impressões, tudo indica que seria interessante desenvolver observações mais precisas a respeito dessa possível dinâmica ativa e colaborativa.

As orientações apresentadas na seção, MATERIAIS E MÉTODOS, se mostraram bastante apropriadas para a utilização de ambientes computadorizados dinâmicos como ferramentas pedagógicas e matemáticas. Um aspecto importante é que tais orientações são genéricas, não são restritas aos *applets* utilizados, nem ao tópico matemático, números reais. A princípio, podem ser aplicadas com *applets* de modo geral. Essa observação se torna mais relevante quando nos damos conta da enorme oferta de *applets* existente na internet. O professor interessado em utilizar mais dessas ferramentas pode muito bem reproduzir as orientações apresentadas aqui para decidir sobre o potencial didático de um determinado *applet* eventualmente encontrado e para criar sequências didáticas que permitam uma boa exploração didática de tal *applet* encontrado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A.; & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5(1), 25-45.

Barbosa, A. (2012). Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação no Brasil: tic educação 2011. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil.

Barbosa, A. (2014). Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras: tic educação 2013. São Paulo: Comitê Gestor da Internet no Brasil.

Brandão, P. C. R. (2005). O uso de novas tecnologias e software educacional na formação inicial do professor de matemática: uma análise dos cursos de licenciatura em matemática do estado de Mato Grosso do Sul. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Duval, R. (2003). Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In Machado, S. (Org.) Aprendizagem em Matemática, Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus. pp. 11-33.

Gomes, M. L. M.; &Vieira, G. M. (2014). Livros didáticos e formação de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Educar em Revista, Curitiba, 30(54), 257-274. Disponível em: https://revistas.ufpr.br/educar/article/view/34325. Acesso em 09 de julho de 2021. https://doi.org/10.1590/0104-4060.34325.

González-Martín, A. S.; Giraldo, V.; & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks. Research in Mathematics Education, 15(3), 230-248.

Paranhos, L. R. L. (2005). Da Possibilidade para o Real: uma pesquisa-ação sobre a formação de professores reflexivos e autônomos na utilização da informática na educação. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-graduação em Educação, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Ripoll, C.; Rangel, L.; & Giraldo, V. (2016). Livro do professor de Matemática na educação básica: números inteiros. Rio de Janeiro: SBM.

Índice Remissivo

Autores

Ana Maria Martensen Roland Kaleff

Professora titular aposentada da Universidade Federal Fluminense (UFF). Doutora em Educação e Mestre em Matemática pela UFF. Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Foi fundadora e coordenadora do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG/UFF) e do Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio (UFF). Foi coordenadora de disciplinas do Curso de Especialização a Distância Novas Tecnologias em Ensino de Matemática (NTEM/UFF) da Universidade Aberta do Brasil e professora do Curso de Mestrado Profissional em Diversidade e Inclusão do Instituto de Biologia (UFF).

Darling Domingos Arquieres

Professora da Rede Estadual de Educação - SEEDUC RJ, regente em matemática desde de 2005. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGEduCIMAT pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2019). Especialista em Educação Matemática pela PUC-RJ (2002), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense - UFF (2014). Graduado com bacharelado e bacharelado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2001). Colaboradora do Projeto Laboratório de Matemática Sustentável, onde estudou o papel do uso de objetos específicos de aprendizagem na melhoria do ensino de Matemática (2015). Desde 2005 sou professor da rede estadual do RJ. De 2018 a 2021 atuei como professora convidada na Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática e suas Aplicações no Ensino da Universidade Castelo Branco.

Daniela Mendes Vieira da Silva

Doutora pelo programa de pós graduação em Ensino de Matemática da UFRJ (PEMAT-UFRJ), mestra pelo programa de pós graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFRRJ (PPGEDUCIMAT_UFRRJ), graduada em Matemática-Licenciatura Plena pelo CEDERJ/UFF. Possuo também atualização em Mídias na Educação pela UFRJ e especialização em Educação Tecnológica pelo CEFET-RJ. Sou professora adjunta na Faculdade de Formação de Professores da UERJ, onde atuo nas licenciaturas em Matemática e Pedagogia e no Programa de Pós Graduação em Matemática (PROFMAT). Sou também pesquisadora associada no grupo de pesquisa do Instituto de Matemática da UFRJ: TIME (Tecnologias, Inclusão, Matemática e Ensino).

Lattes **Ion Moutinho Gonçalves**

Matemático, bacharelado em Matemática (1989) na Universidade Federal Fluminense (UFF). Mestre (1991) em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Doutor (2006) em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR). Pós – Doutorado (2018) em Educação Matemática desenvolvido na Simon Fraser University (SFU). Realizou pesquisas na área de Geometria Diferencial e, atualmente, faz pesquisas a respeito do conhecimento especializado do professor de Matemática. Tem grande interesse no desenvolvimento de estratégias e materiais didáticos que possam ser utilizados por professores que ensinam Matemática. Contato: 21 - 99442 4403, e-mail: ion.moutinho@gmail.com

Lattes **Fernando Celso Villar Marinho**

Professor Titular da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), coordenador do projeto de Desenvolvimento de Jogos Digitais na Educação, licenciado em Matemática (2000) na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre (2005) em Ciências pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Doutor (2014) em Educação em Ciências e Saúde pelo Instituto Nutes de Educação em Ciências e Saúde (NUTES) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Premiado no concurso Inovapps 2015 com o jogo Primogo, autor das séries de TV Os Exploradores de Kuont, Matemática em Toda Parte 2. Desenvolveu e coordenou projetos junto ao Ministério da Educação (MEC), SEEDUC/RJ, CESGRANRIO, FIRJAN e TV ESCOLA, produzindo materiais digitais e recursos tecnológicos. Avaliador no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e no Banco Nacional de Itens do INEP. Entusiasta do uso de tecnologias na educação e 'aprendedor' apaixonado pelo conhecimento, está sempre em busca de soluções criativas e de impacto para muitas pessoas. Contato:@professorfernandovillar, e-mail: fernandovillar@ufrj.br

Organizadores

André Luiz Souza Silva

Licenciado em Matemática (2004) e Especialista em Ensino de Matemática (2008) pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (2010) pelo Centro Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Rio de Janeiro (CEFET-RJ), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática (2010) pela Universidade Federal Fluminense (UFF). e-mail: andre.luiz@ifrj.edu.br.

José Carlos Gonçalves Gaspar

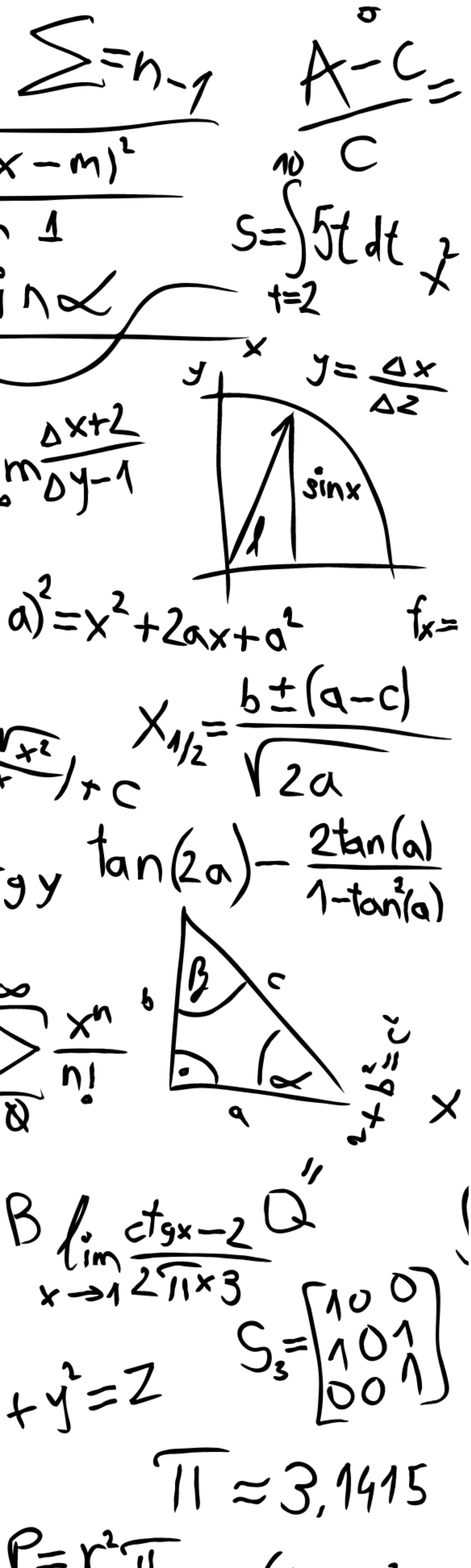
Mestre em Ensino de Ciências na Educação Básica pela Universidade do Grande Rio (Unigranrio), Especialista e Licenciado em Matemática pela UFF. Professor de Matemática na Educação Básica e Superior do IFRJ e da rede Municipal de Duque de Caxias. Membro do Projeto ConSeguir e um dos redatores da reestruturação curricular da rede municipal de Duque de Caxias (2019-2022). Autor de Materiais Didáticos pela Somos Educação e Editora Poliedro. Possui experiência em avaliação em larga escala e com Educação a Distância. Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). Contato:(21) 99881-2933, e-mail:jose.gaspar@ifrj.edu.br.

Vilmar Gomes da Fonseca

Licenciado em Matemática e Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa. Professor do IFRJ-campus Nilópolis. Tem experiência em pesquisa e extensão na área de Matemática atuando principalmente nos campos: ensino e aprendizagem da Matemática, formação de professores, tecnologias educacionais e avaliação educacional. É coordenador de área do núcleo do PIBID da Licenciatura em Matemática do IFRJ-campus Nilópolis (2020 - 2022). Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). e-mail: vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

Marcelo Silva Bastos

Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ. Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Especialista em "Ensino de Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio" pela UFF. Licenciado em Matemática pela UFRRJ. Docente do IFRJ-Campus Nilópolis atuando no Ensino Médio Técnico e no Curso de Licenciatura em Matemática. Coordenador do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ)



9 786581 460372

Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp)
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br