CICLO DE FORMAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO, DA PESQUISA E DA EXTENSÃO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

José Carlos Gonçalves Gaspar
André Luiz Souza Silva
Marcelo Silva Bastos
Vilmar Gomes da Fonseca
Organizadores

Pantanal Editora

2022

José Carlos Gonçalves Gaspar
André Luiz Souza Silva
Marcelo Silva Bastos
Vilmar Gomes da Fonseca
Organizadores

Ciclo de formação em ensino de matemática: contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática

Pantanal Editora

2022

Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo
Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: A editora. **Diagramação e Arte:** A editora. **Imagens de capa e contracapa:** Canva.com. **Revisão:** O(s) autor(es), organizador(es) e a editora.

- Esp. Joacir Mário Zuffo Júnior
- Esp. Maurício Amormino Júnior
- Lda. Rosalina Eufrausino Lustosa Zuffo

Ficha Catalográfica

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C568 Ciclo de formação em ensino de matemática [livro eletrônico] : contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática / Organizador José Carlos Gonçalves Gaspar... [et al.]. – Nova Xavantina, MT: Pantanal, 2022. 84p.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-81460-37-2
DOI https://doi.org/10.46420/9786581460372

1. Simetria. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Gaspar, José Carlos Gonçalves. II. Silva, André Luiz Souza. III. Bastos, Marcelo Silva. IV. Fonseca, Vilmar Gomes da.

CDD 510.7

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

Pantanal Editora

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000.
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil.
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp).
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br

Prefácio

Estimado(a) Leitor(a),

O que é apresentado nesta obra é resultado do trabalho docente incessante e de alta qualidade durante a maior crise sanitária desde a gripe espanhola no século XX. A pandemia do novo coronavírus causou a disseminação mundial da Covid-19, o isolamento social, *lockdowns* ao redor do mundo, quarentenas e milhares de contaminações e óbitos que poderiam ter sido evitados. Mas como as contaminações e óbitos poderiam ser evitados se pouco se conhecia acerca do novo vírus?

A resposta está também em cada capítulo desta obra. Contaminações e óbitos poderiam ter sido evitados se os conhecimentos científicos produzidos em diversas ciências, entre as quais a Matemática, tivessem sido levados em consideração desde o início da pandemia. Uma lição preciosa e dura que podemos tirar de 2 anos de pandemia é que ouvir a Ciência, desenvolver o pensamento científico, educar pelas práticas científicas remotas, híbridas e semipresenciais, além de valorizar os profissionais da educação brasileira é a senha para que em novas ondas pandêmicas estejamos mais preparados.

Assim, cada educador(a) que escreveu suas pesquisas nesta obra científica representa a força e a competência do profissionalismo docente brasileiro, promovendo ações remotas durante a pandemia com tecnologias móveis com materiais adaptados e lúdicos para atrair a atenção de milhares de estudantes que tiveram que estudar em suas casas, muito deles com extrema dificuldade de conexão de internet, mas sempre com o amparo e a dedicação dos professores e de suas famílias.

Destacamos as ações docentes que buscaram reduzir a desigualdade social e tecnológica em muitos lares brasileiros com ações de alfabetização científica online promovendo oficinas, *lives*, aulas síncronas e assíncronas em ambientes virtuais de aprendizagem, em suas universidades e institutos federais, para que cada estudante pudesse continuar seus estudos e compreender que somente com um pensamento crítico é possível combater as atrocidades promovidas por dois vírus.

Um vírus, o da covid-19, que a ciência conseguiu combater por meio da criação de vacinas em centros de pesquisa de instituições públicas brasileiras como o Butantan e a Fiocruz em parcerias com milhares de pesquisadores de universidade públicas brasileiras e estrangeiras. O segundo vírus que é tão letal quando o primeiro que é o vírus da desinformação que geram as denominadas *fake news*, também só é possível ser combatido com uma "vacina", a alfabetização científica capaz de gerar cidadãos críticos e capazes de ler, e interpretar conhecimentos, informações e notícias falsas.

Para combater ambos os vírus, ficou claro durante dois anos de pandemia que a Educação e a atuação de Educadore(a)s comprometidos com a Ciência promoverá estabilidade e segurança nas futuras ações híbridas que permearão o denominado "novo normal". Nessa nova caminhada, mais do que antes, a ação dos educadores será decisiva em aulas híbridas, contextos inter e transdisciplinares, com metodologias ativas, em aulas inclusivas e propostas de sala de aula invertida, realização de projetos de extensão, ações de iniciação científica e salas de aula transformadas em laboratórios para investigação científica.

Por fim, que todos o(a)s educadore(a)s brasileiro(a)s se inspirem nos conteúdos, saberes e conhecimentos problematizados nos capítulos dessa importante obra, elaborada para a divulgação científica.

Que mesmo diante dos maiores desafios sociais e profissionais cultivemos cada vez mais em nossas práticas educativas o verbo *esperançar* ensinado e exemplificado pelo nosso educador e patrono da educação Paulo Freire, *esperançar* no sentido de seguirmos em frente cientes dos aprendizados durante a pandemia e cientes de que na pós-pandemia o caminho deve ser iluminado pelas luzes da Ciência.

Que estejamos unidos a Todo(a)(e)s que creem que a Educação pode libertar qualquer povo das garras de regimes totalitários e neofascistas que maltratam e excluem.

Juiz de Fora, 15 de abril de 2022.

Marco Aurélio Kistemann (Pesquisa de Ponta-UFJF)

Sumário

Introdução

O laboratório itinerante é uma ação do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) que se iniciou em parceria com Pibid e tem por objetivo levar aos alunos de escolas públicas do entorno do campus metodologias norteadas pelas tendências em Educação Matemática que auxiliem na aprendizagem de conceitos matemáticos. Ações do laboratório itinerante acontecem desde 2018 e têm contribuído para o estímulo à prática da pesquisa para alunos do curso de licenciatura em Matemática da instituição, além de auxiliar os estudantes a superarem algumas dificuldades que surgem durante a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No momento, o laboratório tem realizado parcerias com algumas escolas da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro que se localizam nos municípios de Mesquita e Nilópolis. As atividades realizadas com os alunos das escolas envolvidas exploram tanto conceitos matemáticos de forma interdisciplinar, como também jogos e sequências de ensino com uso de materiais manipulativos industrializados ou construídos com material de baixo custo. A aplicação dessa metodologia tem contribuído para aproximar o licenciando da realidade que vai atuar, pois, em muitas realidades, a escola não dispõe de recursos didáticos que possibilitem uma construção significativa de conceitos matemáticos. Nesse sentido, o uso desses recursos a partir de materiais de baixo custo pode contribuir para que os futuros professores sejam instrumentalizados quanto à construção de materiais que atendam às diferentes necessidades dos alunos quanto à aprendizagem da Matemática.

Vendo o bom andamento do projeto e a possibilidade de ampliação dele, em 2019 o projeto foi submetido a fomento à Coordenação de Extensão (Coex) do IFRJ, sendo aprovado em dezembro desse mesmo ano. Durante o início de 2020, ainda no período de planejamento das ações com as escolas parceiras, houve a necessidade de paralisação das atividades presenciais por conta da epidemia da covid-19. Nesse instante, foi necessário reestruturar o projeto para que suas ações fossem em formato remoto. Dessa maneira, realizamos uma oficina pelo *google meet* na XXV Semana de Tecnologia (Sematec), com colaboração da equipe do projeto *Desenvolvimento Jogos Digitais na Educação*[1] (DJDE) do Colégio de Aplicação da UFRJ e do Projeto de Pesquisa *Pesquisa de Ponta, ligado* à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), com o título *Despertando para educação financeira: uma introdução gamificada*. Nela houve a participação de alunos do ensino médio, do curso de licenciatura em Matemática, professores de Matemática da Educação Matemática e uma professora de ensino superior.

Além da participação na Sematec, foi desenvolvido um ciclo de formação com transmissão pelo canal do Laboratório Ensino de Matemática (LabEM) no YouTube, com quatro encontros. No primeiro encontro, o professor Fernando Villar (CAP-UFRJ) ministrou a oficina *Práticas Didáticas Interativas e*

[1] Site do projeto disponível em https://www.jogosdigitais.cap.ufrj.br/

Avaliativas no Ensino Remoto[2]. Nela ele apresentou um pouco da sua experiência com os alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro durante a pandemia do coronavírus. O segundo encontro foi com o professor Luiz Felipe Lins (SME-RJ), por meio da palestra *Desenvolvendo competências e habilidades por meio da metodologia de projetos nas aulas de matemática*[3], que falou a respeito da sua experiência com alunos da rede municipal de educação da cidade do Rio de Janeiro, incluindo o projeto que o conduziu ao "Prêmio Shell de Educação Científica" em 2020. No terceiro encontro, a professora Ana Kaleff (UFF) proferiu a palestra *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*[4], em que apresentou reflexões sobre o ensino da geometria não euclidiana na escola básica frente às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que se destaca a importância do ensino e aprendizagem da geometria não euclidiana na escola básica no contexto da escola do século XXI. No quarto e último encontro do ciclo, as professoras Daniela Mendes (Uerj – Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) e Darling Domingos (Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) desenvolveram a oficina *Ensino de números reais com multimeios*[5].

Por fim, em junho de 2021, foi realizada a oficina *Aprendendo Geometria com as Mãos* em formato remoto. Tal ação foi em parceria com uma escola pública da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, localizada no município de Mesquita, na Baixada Fluminense, tendo a participação de alunos do 6º. ao 9º. ano do ensino fundamental. Ela ocorreu em dois encontros, que permitiram o desenvolvimento do conceito de simetria com apoio de dobraduras.

Como fruto de parte das ações realizadas durante o projeto, apresentamos este *ebook* composto por quatro capítulos, que serão descritos a seguir:

No primeiro capítulo, Geometria na Pandemia, os autores André Luiz Souza Silva, José Carlos Gonçalves Gaspar e Vilmar Gomes da Fonseca apresentam uma proposta didática inovadora para o ensino de simetria axial, com base em uma sequência didática de quatro tarefas exploratórias com recurso de dobraduras, recortes e uso de tecnologias digitais. Essa proposta didática resulta de ações do LabEM Itinerante do IFRJ/Campus Nilópolis, a partir da realização de um projeto de extensão realizado numa escola pública do município de Mesquita-RJ, e teve como base uma experiência de ensino que foi planejada e executada em contexto de ensino remoto, durante o advento da pandemia da covid-19 nessa escola. Os autores apresentam as premissas que influenciaram a construção da proposta didática, a saber: (i) o contexto da pandemia e o seu conjunto de limitações e desafios impostos; (ii) a escolha de conteúdo

---

[2] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=fYOgdh15mL4&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi, com 1644 visualizações em 15 de abril de 2022.

[3] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=oqJohU8Yhsw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=2, com 750 visualizações em 15 de abril de 2022.

[4] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=YxeW-2q_TMM&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=3, com 755 visualizações em 15 de abril de 2022.

[5] Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=6yOFpdqD-tw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=4, com 583 visualizações em 15 de abril de 2022.

de geometria que considera as ideias de Felix Klein (1849-1925) no programa Erlangen; e (iii) práticas emergentes para o ensino de matemática que consideram o uso de recursos manipuláveis e tecnológicos. A seguir, apresentam uma descrição comentada da proposta didática e seus objetivos, e finalizam propondo reflexões sobre possibilidades de criação de ambientes de ensino promotores de aprendizagens significativas.

No segundo capítulo, intitulado *Práticas Didáticas Interativas e Avaliativas no Ensino Remoto*, o autor, a partir do Ensino Remoto Emergencial (ERE) que surgiu no ano de 2020 como alternativa para dar continuidade às atividades escolares e, simultaneamente, preservar a saúde de estudantes e docentes, durante a pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2, discute que inicialmente muitos docentes se posicionaram contrários ao ERE porque entendiam que não seria possível fazer ensino remoto de qualidade na educação básica. No entanto, com o passar dos dias e o estudo e a dedicação de milhares de docentes em todo o mundo, foram criados caminhos alvissareiros para a educação frente aos desafios que se apresentaram. Neste texto são apresentadas algumas práticas didáticas desenvolvidas e utilizadas por docentes do Colégio de Aplicação da UFRJ, de forma que o potencial dos recursos digitais fosse demonstrado por meio das avaliações positivas de estudantes, responsáveis, licenciandos e docentes de diferentes disciplinas.

No terceiro capítulo, cujo tema é *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*, a autora espera responder a algumas questões que acredita serem pertinentes a esse tempo da pandemia provocada pelo novo coronavírus, bem como para o futuro, com os ensinos híbrido e remoto. Apresenta um conjunto de questões relacionadas às geometrias não euclidianas (GNE) que podem levar o(a) leitor(a) a pensar não ter ligação com a pandemia. Para responder ao "por quê?" do título, a autora apresenta como entende a criação de novos conhecimentos científicos e as lógicas envolvidas com as ações relacionadas ao pensamento científico que os embasam, à Educação e à Matemática. Para tanto, inicia com uma breve introdução histórica à geometria euclidiana; em seguida, contextualiza como surgiram as GNE e as consequências desse surgimento para as Ciências e para a pandemia. Para responder ao "para quê?" se introduzir as GNEs no Ensino Médio, analisa como o pensamento científico e o ensino das representações matemáticas são apresentados na Base Nacional Comum Curricular, bem como eles se interligam em relação à pandemia; elenca alguns resultados de pesquisas realizadas, no âmbito da formação de professores de Matemática e do livro didático; e finaliza com considerações sobre exemplos de GNE que podem ser utilizados na escola básica.

A fim de contribuir para a apropriação das tecnologias digitais por parte dos professores de matemática e para seu uso com intencionalidade didática, o texto do quarto capítulo, *Problematização dos números reais com recursos da Geometria Dinâmica: Descobrindo lacunas na reta numérica*, introduz um conjunto de atividades educacionais pensadas para a problematização e a aprendizagem dos números reais com o uso de recursos tecnológicos escolhidos de maneira a propiciar uma abordagem interativa e dinâmica do tema.

São três construções eletrônicas, chamadas de *applets*, que favorecem a exploração de importantes orientações didáticas.

Para finalizar, agradecemos à direção do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – Campus Nilópolis pelo apoio dado a esse projeto de extensão por meio de fomento oriundo do edital interno nº 11.

Capítulo III

Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na Escola Básica: Por quê? Para quê?

Recebido em: 30/06/2021
Aceito em: 31/07/2021
10.46420/9786581460372cap3

Ana Maria Martensen Roland Kaleff[1]

INTRODUÇÃO: UM QUESTIONAMENTO

Com o presente texto, esperamos responder a algumas questões que acreditamos pertinentes a esse tempo da pandemia provocada pelo novo coronavírus, bem como para o futuro, para quando o sistema escolar estiver menos estressado devido à emergência de tantas práticas educacionais inovadoras relacionadas aos ensinos híbrido e remoto. O conjunto de questões relacionadas às geometrias não euclidianas (GNE) apresentado a seguir, pode levar o leitor(a) a pensar que não tenha ligação com essa tão inusitada vivência compartilhada com o restante do mundo; no entanto, mostraremos como tudo isso pode ser interligado.

Todos sabemos que a partir de 2021, os resultados das Ciências e as ações fundamentadas no pensamento científico para o enfrentamento da pandemia têm sido muito questionadas, então, por que nos preocuparmos especificamente com as GNE? Será que, o conhecimento de como tais geometrias surgiram pode nos ajudar a refletir melhor sobre as ações executadas no mundo científico de nossos dias? Mas, será que sabemos o que são as GNE e como elas surgiram? Conhecemos exemplos de GNE? Afinal, devemos escrever geometrias não-euclidianas ou geometrias não euclidianas (com ou sem hífen)?

Em nosso entendimento e como docentes, talvez, não estejamos conscientes de que as questões anteriores sobre as geometrias são muito importantes para o ensino de Matemática e para o entendimento do mundo científico atual; portanto, cabem mais perguntas: será que as GNE ainda têm algum significado para o ensino, nos dias que virão e nesses da pandemia?

Olhando para o futuro de nossas escolas, podemos nos perguntar: para que se pensar em colocar uma introdução às GNE no Ensino Médio? Será que as GNE podem ser relacionadas à atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC)? Existem exemplos didáticos de GNE para o Ensino Básico? Os atuais docentes estão preparados para ensiná-las?

[1] Universidade Federal Fluminense
Autor de correspondência: anakaleff@id.uff.br

Iniciamos o presente texto buscando responder ao "por quê?" do seu título, apresentamos como entendemos a criação de novos conhecimentos científicos e as lógicas envolvidas com as ações relacionadas ao pensamento científico que os embasam, à Educação e à Matemática. Para compreendermos tal criação, iniciamos com uma breve introdução histórica à geometria euclidiana (GE) e a dois problemas encontrados no seu bojo; em seguida, contextualizamos como, nos séculos XIX e XX, surgiram as GNE e as consequências desse surgimento para as Ciências.

Para responder ao "para quê?" se introduzir as GNE no Ensino Médio, analisamos como o pensamento científico e o ensino das representações matemáticas são apresentados na BNCC, bem como estes se interligam em relação à pandemia; elencamos alguns resultados de pesquisas realizadas por nós, no âmbito da formação de professores de Matemática e do livro didático, e finalizamos com considerações sobre exemplos de GNE que podem ser utilizados na escola básica.

EDUCAÇÃO, MATEMÁTICA, O PENSAMENTO CIENTÍFICO E SUAS LÓGICAS: POR QUÊ?

A introdução de aspectos do pensamento científico e de práticas experimentais das Ciências no ensino têm início no final do século XIX, em conjunto com a adoção de algumas atividades laboratoriais na Educação.

Ao colocar a prática laboratorial em foco, o educador norte-americano John Dewey (1859-1952) influenciou outros educadores e formadores de políticas educacionais de várias partes do mundo; no Brasil, inspirou o Movimento Escola Nova, e principalmente o professor Anísio Teixeira (1900-1971), um dos principais idealizadores desse Movimento.

Teixeira teve seu mestrado orientado por Dewey e se empenhou na organização e administração do sistema público de ensino brasileiro e na propagação da importância da interligação entre aspectos educacionais científicos e sociais. Conforme depreendemos de Teixeira (1968), este considerava as atividades experimentais fundamentais, tanto como fomento ao pensamento científico para o entendimento da natureza e do ambiente físico, quanto do meio social em que vivemos. Teixeira tomava as atividades experimentais como uma excelente prática escolar para promover a democracia e o bem-estar social.

No entanto, segundo Lefebvre (1991), os procedimentos de ensino científico e de sua estruturação pedagógica não são imediatos para serem integrados ao sistema educacional. Tais procedimentos devem ser elaborados de modo a possibilitar o exercício de aquisição de processos lógicos de pensamento específicos das lógicas presentes no dinamismo da realidade, os quais só irão se realizar se respeitadas as especificidades próprias de cada ramo do conhecimento e de cada ciência. Sob essas considerações, como apresentaremos mais adiante, é necessário que reconheçamos a ciência Matemática como um conhecimento humano, criado por homens e mulheres, tanto para se entender e representar a realidade como criação teórica sistêmica, idealizada e em contínuo progresso.

Ainda segundo Lefebvre (1991), o conhecimento humano envolve duas maneiras de se constituir, seguindo duas vertentes lógicas: a primeira, chamada de "lógica dialética", é a que rege e interliga as leis mais gerais do universo, leis comuns a todos os aspectos da realidade, desde os de natureza física até os mentais, passando pela natureza viva e pela sociedade. Essa vertente exige um constante reexame das teorias elaboradas pelos estudiosos e a crítica das suas práticas. No caso da Matemática, é essa a lógica que rege os processos mentais da criação e descoberta não formais de novos conteúdos matemáticos ligados à intuição, à percepção por meio dos sentidos, à visualização, à criatividade etc. A segunda vertente é a da "lógica formal" que rege intrinsecamente os processos formais internos à própria Matemática e ligados às linguagens matemáticas de representação (algébrica, aritmética, gráfica por meio de desenhos geométricos etc.).

Enfatizamos que existe uma grande distinção quanto ao funcionamento do pensamento em relação a essas duas lógicas, quando se trata da negação de uma ideia ou conceito: a lógica dialética parte do "princípio da contradição", para o qual um objeto ou fenômeno (do mundo material, real ou mental) está em constante movimento de (re) ou (i)novação quando submetido a uma dupla negação do entendimento da sua forma e do seu conteúdo, ou seja, a dupla negação potencializa o surgimento de algo novo (como objeto ou fenômeno). Por sua vez, a lógica formal é regida pelo "princípio da não contradição", no qual, uma ideia ou conceito matemático, quando submetido a uma dupla negação, tem como resultado a mesma ideia ou conceito.

É importante se notar que, para a lógica dialética, a dupla negação de uma ideia ou conceito pode se dar tanto em relação à forma com que este se apresenta (portanto, a negação é em relação a uma de suas representações) quanto em uma negação do próprio conteúdo. Porém, na lógica formal, considerando-se que os objetos matemáticos são ideais e abstratos, segundo Duval (2003), os conceitos e propriedades matemáticas necessitam sempre de uma forma de registro de representação linguístico para a comunicação do conteúdo idealizado. É essa forma de registro de representação que sofre a dupla negação (em linguagem proposicional natural ou simbólica, e em uma linguagem gráfica).

Quadro 1. As lógicas do conhecimento e a dupla negação. Fonte: a autora.

Seja um OBJETO P (conteúdo) e consideremos RP uma forma de registro de representação do Objeto P
Princípio da contradição da lógica dialética: ~~ OBJETO P <-> (~ OBJETO P e ~ RP) -> OBJETO NOVO. Princípio da não-contradição da lógica formal: (RP <-> ~~RP) ou seja (RP -> ~ RP -> ~~ RP -> RP). Lembrando- se que o OBJETO ideal matemático P (conteúdo mental) é sempre representado por RP em um registro de representação.

Segundo Duarte (1987), no âmbito educacional, o exercício dessas duas lógicas permite a interligação entre o pensamento científico e as mudanças na realidade social. Portanto, ao orientarmos os procedimentos de ensino para o exercício das lógicas de interpretação, tanto a do conhecimento matemático (pensamento matemático e científico) como o relacionado à realidade, estaremos contribuindo para a formação de atitudes mentais do estudante que o levem a uma participação consciente nos processos de transformação social. Cabe acrescentar que, do grande conjunto de práticas próprias às Ciências, a investigação é aquela que traz diversos elementos passíveis de extrapolar as Ciências da natureza e a Matemática para todas as outras áreas do conhecimento, levando à descoberta de novas situações sociais e da realidade (das Ciências naturais ou da Matemática).

No que se segue, buscaremos interligar o que foi considerado até aqui com as GNE, para tanto, relacionaremos as duas lógicas do conhecimento, o pensamento científico e as representações com o surgimento das geometrias não euclidianas.

UMA REVISÃO DAS GEOMETRIAS: POR QUÊ?

Iniciamos essa revisão das geometrias, lembrando a importância histórica da chamada geometria euclidiana (GE) para o desenvolvimento da Matemática.

A geometria euclidiana

Foi por volta do século VI a.C. e a partir de Tales de Mileto (cerca de 624 - 546 a.C.), que os conhecimentos empíricos geométricos e relacionados ao entendimento do mundo à nossa volta começaram a se transformar em um sistema de representações de ideias interligadas a especulações abstratas, baseadas em raciocínios lógico-dedutivos. Esse movimento transformador atingiu o seu ápice na época de Euclides, que viveu em Alexandria, no Egito, durante o reinado do rei Ptolomeu I (306-283 a.C.).

Foi Euclides quem compilou, em forma estruturada, os conhecimentos matemáticos consensuais até então estabelecidos, reunindo-os em 13 livros denominados "Os Elementos".

Esta estruturação, escrita na forma de regras enunciadas por proposições na linguagem natural, consistia em definições (vinte e três afirmações apresentadas sem quaisquer comentários); axiomas (cinco afirmações consideradas verdades estabelecidas por si mesmas) e postulados (cinco afirmações consideradas como proposições geométricas). A partir da combinação dessas proposições por meio de leis da lógica clássica, Euclides estabeleceu relações consideradas verdadeiras e denominadas de "teoremas", cuja veracidade lógica podia ser constatada por meio de sequências de raciocínio dedutivo, ou seja, da verificação da veracidade de cada passo de uma sequência de inferências lógicas. Essa estruturação das relações foi chamada de "modelo de sistema axiomático" e se constitui na primeira concepção teórica da Matemática como uma apresentação estruturada, por meio de um sistema de regras. Como veremos logo a seguir, tal maneira de se estruturar regras também influenciou a longa história da evolução do conhecimento científico nos países ocidentais, pois outros ramos das Ciências foram estabelecidos da mesma forma de um modelo de sistema axiomático.

Segundo Carvalho (1994), o Livro I de "Os Elementos" se inicia com a lista de definições, na qual, por exemplo, a primeira e a segunda afirmam que: "um ponto é aquilo que não tem partes" e "uma linha é uma extensão sem largura". O objetivo dessas definições é fornecer ao leitor uma base para o entendimento dos termos matemáticos.

Quadro 2. "Trecho de "Os Elementos". Fonte: Carvalho (1994).

Os cinco primeiros postulados.
1º - Pede-se, como coisa possível que se tire, de um ponto qualquer para outro ponto qualquer, uma linha reta; 2º - Que uma linha reta determinada continua em direção de si mesma, até onde seja necessário; 3º - Que com qualquer centro e qualquer intervalo se descreve um círculo; 4º - Todos os ângulos retos são iguais;

5º - Se uma linha reta, encontrando-se com outras duas retas, fizer ângulos internos, da mesma parte, menores que dois retos, estas duas retas, produzidas ao infinito, concorrerão para a mesma parte dos ditos ângulos internos.

Considerando que "postular" significa "pedir para aceitar", Euclides "pede" ao seu leitor para aceitar como verdadeiras as afirmações geométricas que formula como "postulados". Os três primeiros são sobre a construção geométrica, sendo que o 1º e o 3º Postulados fornecem os instrumentos básicos de desenho de toda GE, ou seja, a régua não graduada e o compasso.

A partir de 1796, uma versão do 5º Postulado de Euclides, tornou-se muito conhecida devido aos estudos do matemático e físico John Playfair (1748-1819). Este demonstrou a equivalência lógica dessa afirmação com aquela apresentada originalmente em "Os Elementos". Essa nova versão do postulado, por ser bem mais simples e de fácil compreensão do que a original, passou a ser considerada no ensino e apresentada na maioria dos livros didáticos.

Quadro 3. Versão de John Playfair – 5º Postulado da GE. Fonte: Carvalho (1994, p.18).

Versão difundida nos livros didáticos atuais.
Por um ponto do plano, não pertencente a uma determinada reta, passa uma e somente uma reta paralela à reta considerada.

Para Mlodinov (2004), a GE pode ser considerada como uma janela para o entendimento do mundo a nossa volta, pois até o século XIX, ela foi utilizada e muito bem considerada pelos estudiosos para descrever as características do nosso universo físico; mas ela também influenciou muitos matemáticos, filósofos e lógicos, como Baruch de Espinosa (1632-1677), Georg W. F. Hegel (1770 – 1831), Bertrand A. W. Russell (1872-1970), entre outros. Como veremos a seguir, apesar dos muitos questionamentos sobre a veracidade de algumas de suas regras, levantados até pelo próprio Euclides e por vários matemáticos, suas verdades absolutas perduraram até o século XIX.

Com o passar do tempo, a GE apresentou alguns problemas**,** os quais estão no cerne de uma longa discussão que envolve a evolução do conhecimento científico ocidental. Um desses está relacionado à maneira de ela descrever algumas formas e padrões encontrados na natureza; pois, a GE descreve bem os padrões de regularidade dos objetos, porém, o mesmo não ocorre se os padrões forem repetitivos, irregulares e fragmentados. Por exemplo, um tronco de uma árvore pode ser representado como um cilindro posicionado verticalmente ao plano do solo; no entanto, a GE não consegue descrever de uma maneira satisfatória as rugosidades irregulares apresentadas na casca que recobre a superfície do tronco.

Um outro problema no bojo da GE e, aparentemente, até considerado por Euclides, foi quanto à falta de clareza para o entendimento do Quinto postulado. Muitos estudiosos se questionaram se a afirmação não seria uma verdade (teorema) decorrente dos outros quatro postulados. Durante quase 2100 anos, muitos matemáticos tentaram sem sucesso demonstrar essa relação e, como consequência, como trataremos a seguir, surgiu uma nova maneira de se encarar e considerar os conhecimentos geométricos.

SECULO XIX: SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Na primeira metade do século XIX, vários matemáticos como, Nicolai Lobachevsky (1792-1856) em 1829; Janos Bolyai (1802-1860), em 1832; Georg Bernhard Riemann (1826-1866), em 1854 e, posteriormente, Eugenio Beltrami (1835-1900), Jules-Henri Poincaré (1854-1912) e Felix Klein (1849-1925), concluíram que a pretedida demonstração do Quinto Postulado como um teorema não era possível. Segundo Blumenthal, (1961), tal discussão é anterior às considerações teóricas que propiciaram o surgimento de outros sistemas geométricos e seus modelos, pois o matemático alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855), em carta ao matemático Franz A. Taurinus (1794-1874), já em 1824, afirmava que havia estabelecido e desenvolvido um outro sistema axiomático curioso e muito diferente do euclidiano. Todavia, Gauss, considerado por muitos estudiosos como o maior de todos os matemáticos que viveram no século XIX, - se não o maior de todos os tempos -, nunca deixou que fossem publicados quaisquer resultados a respeito dessas suas descobertas tão inovadoras e desestruturadoras do estabelecido matematicamente há tantos séculos

Foram esses estudiosos que nos permitem, nos dias de hoje, olhar o conhecimento geométrico para além da janela aberta pelos paradigmas propostos por Euclides na GE

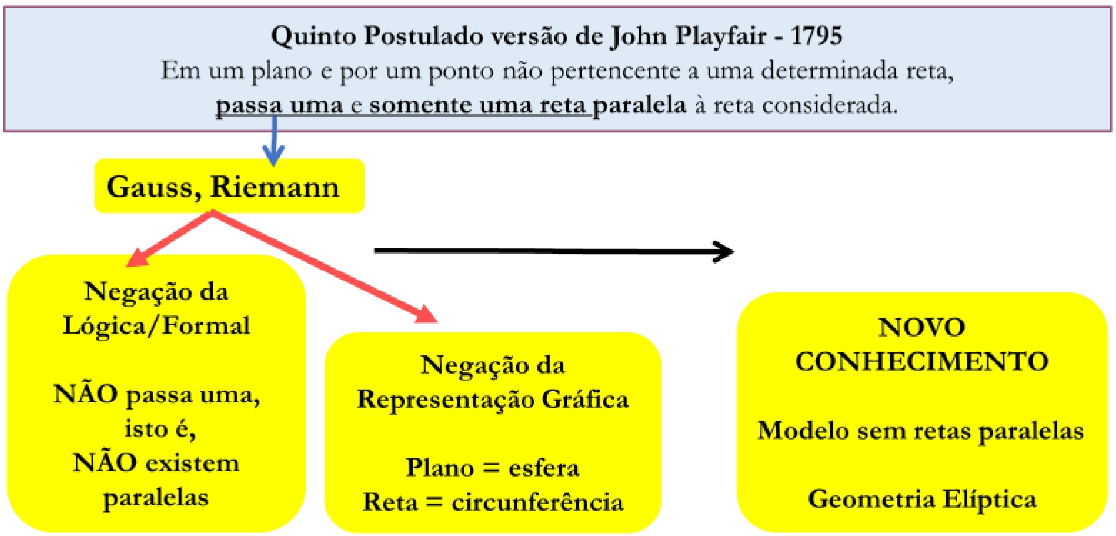
Antes de elencarmos alguns dos modelos introdutórios às GNE, enfatizamos que, surgiram grandes dificuldades quando os estudiosos tentaram passar das concepções euclidianas para as abstrações não-euclidianas, pois as imagens visuais, percebidas do mundo real, sempre influenciaram a representação dos conceitos geométricos. Os modelos não-euclidianos foram os primeiros conjuntos de regras matemáticas passíveis de interpretações e representações gráficas, na forma de desenhos, que não correspondiam ao esperado pela percepção visual. Portanto, modelos que fugiam (e realmente fogem!) ao conhecimento gerado pelo senso comum.

Quem não se lembra da imagem de uma reta linear, contínua e paralela ao plano do chão, quando ouve o termo “reta”? Quem não imagina dois segmentos retilíneos equidistantes quando ouve a expressão “retas paralelas”? A quebra com essa imagem mental de retas equidistantes foi conseguida quando os matemáticos, pioneiros estudiosos desse tema, passaram a considerar "retas paralelas como aquelas que não têm pontos em comum", ou seja, "retas paralelas são conjuntos de pontos de uma mesma superfície que não se interceptam".

Como apresentamos nos Quadros 4 e 5, a negação do Quinto Postulado teve como consequência a descoberta da "geometria elíptica", na qual não existem retas paralelas e das "geometrias hiperbólicas", em cujos modelos existem mais de uma paralela a uma determinada reta. Portanto, ocorreu o surgimento de uma variedade de sistemas axiomáticos dedutivos alternativos ao euclidiano, conhecidos como "geometrias não-euclidianas (GNE)".

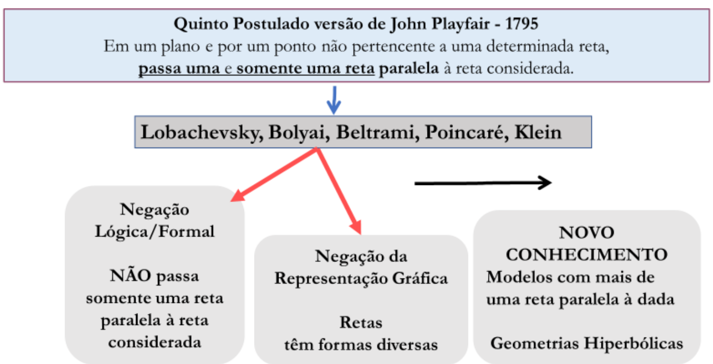
Quadro 4. Criação de novos conhecimentos geométricos. Fonte: a autora.

Análise da Dupla Negação do Quinto Postulado: Negação de "Passa uma"



Quadro 5. Criação de novos conhecimentos geométricos Fonte: a autora.

Análise da Dupla Negação do Quinto Postulado: Negação de "Passa somente uma"



Ressaltamos que a criação das GNE representa um marco histórico no desenvolvimento das Ciências, pois é, segundo Gans (1973), "nada menos que uma revolução na Geometria. Com o passar do tempo foi provado que os efeitos da descoberta não foram menos profundos em outros ramos da Matemática, da Física e da Filosofia".

No Quadro 6, apresentamos alguns exemplos das GNE pioneiras.

Quadro 6. Exemplos de geometrias não-euclidianas. Fonte: a autora.

Geometrias elíptica e hiperbólicas

SECULO XX: OUTRAS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS E CONSEQUÊNCIAS DO SURGIMENTO DAS GEOMETRIAS

Foi através das novas geometrias que os cientistas iniciaram a busca por explicar o mundo físico dos nossos dias, por meio de ferramentas teóricas modernas, por exemplo, as ligadas à Teoria da Relatividade. Foi essa grande abertura científica e filosófica, trazida pelo surgimento das GNE às ideias euclidianas e às de Newton relacionadas à Física, que fez os conceitos científicos anteriores ao século XIX serem considerados insuficientes para a representação dos fenômenos físicos.

No final do século XIX, também se tornaram conhecidos alguns sistemas axiomáticos interessantes, criados a partir de conjuntos finitos de pontos e com poucos elementos arbitrários. Os modelos desses sistemas negam o Segundo Postulado de Euclides, aquele que solicita se considerar poder prolongar sempre uma reta, até onde seja necessário. Em alguns desses modelos, agrupamentos com exatamente três elementos distintos são tratados como "retas" ou "linhas", cujas relações são estabelecidas por meio de poucos axiomas, que negam esse postulado, ou seja, não permitem que sempre se trace uma linha reta contínua, na direção de si mesma, até onde se queira. Segundo Franco de Oliveira (1995), esse tipo particular de constituição teórica possui as características do que se conhece nos dias de hoje como "sistema axiomático de geometria finita". Ainda em 1898, Gino Fano (1871 - 1952) estabeleceu um modelo dessas geometrias com 7 pontos e um outro, devido ao matemático John Wesley Young (1879 - 1932), surgiu em 1906, ambos os modelos podem ser encontrados em Kaleff (2004). O estudo desses sistemas finitos é fundamental para vários ramos da Matemática surgidos desde então, tais como Matemática Discreta, Análise Combinatória, Estatística e Teoria dos Grafos.

Após as descobertas geométricas aqui relatadas, passaram-se muitos anos para que outros conceitos surgissem e permitissem descrever melhor ainda os objetos da nossa realidade física, ou seja, descrever aqueles objetos naturais com formas repetitivas irregulares, tortuosas ou salientes. Em meados do século XX, segundo Barbosa (2007), o matemático Benoit Mandelbrot (1924 - 2010) criou o conceito denominado "fractal". Este termo vem de duas palavras latinas *fractus* e *frangere* que significam "quebrar" e "partido", e refere-se às características naturais dos objetos que parecem fragmentados, irregulares e partidos, cuja dimensão pode ser expressa por um número não inteiro, fugindo da noção de duas e três dimensões referentes aos objetos do plano e do espaço euclidianos. Desde então, tal sistema axiomático que trata mais propriamente dos objetos naturais é denominado de "geometria fractal" e se consolidou como uma nova área da Matemática devido ao desenvolvimento dos computadores e de novas teorias advindas da Física, Biologia, Astronomia e outras Ciências.

AS GNE E A PANDEMIA, BNCC E O FUTURO DE NOSSAS ESCOLAS: PARA QUE?

Cabe ressaltar que, o surgimento das novas geometrias, as quais, a partir de agora, indicaremos por "geometrias não euclidianas" (sem hífen!) e, que negam algum dos axiomas da GE, trouxe à luz uma importante característica da própria Matemática que, até o século XIX era pouco percebida e a qual já nos referimos anteriormente: a de que Matemática é um sistema de conhecimentos construídos por homens e mulheres através da história, sujeito a reformulações e transformações, cujas afirmações, frente a determinados questionamentos, geram revisões de seus próprios conceitos, acarretando novas teorias matemáticas. Portanto, em sua origem, foram os processos de negação do Quinto Postulado Euclidiano que deram origem à criação de novas teorias matemáticas e ao grande desenvolvimento da Matemática do século XX, o que também se refletiu em outras Ciências e no desenvolvimento do pensamento científico.

Pelo apresentado, podemos, de uma maneira resumida, afirmar que, até os dias de hoje, a dupla negação de um fato ou conceito geométrico tem balizado a maneira de se criar um novo conceito, nos demais ramos do conhecimento científico e social.

Olhando para o momento tão inusitado da pandemia em que hoje vivemos, precisamos considerar que os cientistas, voltados para as Ciências biológicas, precisam criar vacinas que evitem a COVID-19 e, para tanto, entendam o que seja o seu transmissor, o vírus Sars-Cov-2, e sua capacidade de propagação, regeneração e transmutação em novas cepas. Para tanto, os cientistas necessitam rever todo o conhecimento científico sobre criação de vacinas estabelecido até 2020. Portanto, cabe perguntar: não estaríamos vivenciando um momento em que deva ocorrer o surgimento de algo novo (a vacina) a partir de uma dupla negação do conhecimento já estabelecido?

Pelo que temos conhecimento, podemos dizer resumidamente e de uma maneira quase simplória, que os cientistas necessitam criar meios (uma vacina) para "negar (evitar)" a propagação do novo coronavírus (Sars-Cov-2) e também "negar o tempo exigido" para a confecção e testagem desses meios (uma vacina que negue o vírus e que negue a disseminação de novas cepas).

Sob essas considerações, olhando para o futuro, a importância de introduzirmos conceitos elementares das GNE, até mesmo na escola e, principalmente, no âmbito da licenciatura em Matemática, reside no fato dessas teorias possibilitarem um melhor entendimento das Ciências e do nosso mundo físico, por meio da quebra de regras, verdades e paradigmas científicos previamente estabelecidos.

No que tange o ensino da Matemática, e como há muito tempo temos pontuado (ver em Kaleff 2007, 2016), a introdução de conceitos elementares das GNE permite a quebra de padrões visuais, trazendo o visualmente inesperado para a sala de aula e a oportunidade da criação de novas imagens mentais e conceitos matemáticos. Ou seja, a introdução precoce às GNE possibilita trazer para jovens adolescentes, novos conceitos científicos por meio de padrões renovados de desenho, que permitem relacioná-los a expressões e palavras com outros significados, além daqueles pertencentes ao senso comum euclidiano, unindo características aparentemente antagônicas, quando apresentadas em diferentes linguagens e em outros registros gráficos de representação matemática.

Cumpre citar Fasheh (1998), que comunga com nossas ponderações e introduziu conceitos das GNE em uma pesquisa envolvendo adolescentes palestinos, na escola básica. Para esse autor, a potencialidade da introdução ao ensino dedutivo, por meio de geometrias não euclidianas, reside em que estas permitem objetivar a percepção de diferenças e de regularidades entre estruturas axiomáticas diversas, bem como a conscientização de conceitos desenvolvidos com muitos preconceitos e um melhor entendimento da própria sistematização da ciência Matemática. Tais percepções são necessárias e devem ser realizadas no âmbito escolar, quando se visa à evolução científica e social de um país em desenvolvimento, nas palavras de Fasheh (1998):

> Os estudantes aprendem a ver similaridades entre coisas que não parecem similares à primeira vista. A descoberta de que dois diagramas, por exemplo, podem ser considerados como modelos de um mesmo sistema abstrato (através da troca dos significados de 'linha' e 'ponto' nos axiomas dos sistemas) foi sempre chocante e interessante para os alunos e uma fonte de discussão séria, profunda e envolvente, que normalmente durava várias aulas. Em minha experiência, esta espécie de interação quebrou muitos preconceitos e formas rígidas de pensar. [...] acabei por acreditar que o pensamento dedutivo pode ser usado com muita eficiência para criar novas atitudes e percepções no que se refere ao conhecimento em geral e à Matemática em particular - percepções e atitudes que são bastante necessárias em nossa sociedade e cultura e, imagino também, em outras sociedades de países de Terceiro Mundo. Primeiro os alunos aprendem que a Matemática é criada pelo homem. Eles aprendem que os axiomas não são um presente de Deus ou um presente da Natureza, mas em vez disso, são regras e procedimentos que evoluem com o tempo, através de um processo longo e difícil. Eles aprendem que não somente as regras básicas evoluem, mas também como evolui o sentido das palavras e conceitos (tais como idiomas). [...)] os estudantes aprendem um modelo intelectual ou estrutura - o modelo axiomático - que está faltando em nossa cultura. [...] os estudantes são ajudados a verem alternativas e o sentido de "verdade relativa". Eles aprendem que os axiomas podem ser modificados, parcial ou totalmente, para produzir novos sistemas e modelos. (...) os estudantes são ajudados a relacionar um certo evento ou fenômeno do mundo real com vários modelos abstratos possíveis; e vice-versa, um sistema abstrato pode ter vinte modelos ou aplicações "concretas" no mundo real.

No entanto, como mostramos em uma pesquisa realizada por nós e apresentada em Kaleff (2004, 2007), as imagens euclidianas surgem e impregnam a nossa mente de maneira espontânea. Interferir e romper com tais procedimentos mentais tão poderosos e comuns a todos, professores e alunos, tem sido e continuará a ser um árduo trabalho escolar para o desenvolvimento do pensamento científico, na medida em que precisamos levar em conta as considerações anteriores, as quais também encontram reflexos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

A BNCC enfatiza o papel primordial do pensamento científico, crítico e criativo, e o seu desenvolvimento, admitindo que esta maneira de pensar compõe uma das dez Competências que devem ser estimuladas no Ensino Básico. Explicitamente, a Segunda Competência a ser adquirida pelo aluno seria:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das Ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas (Brasil, 2019).

Por outro lado, a BNCC do Ensino Médio enfatiza o papel das diferentes linguagens (algébrica, vetorial, aritmética, gráfica em traçados de desenhos, tabelas etc.) e representações em Matemática para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos:

> É em especial na área de Matemática que podemos verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, de ideias e de conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas. Na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, resolução e comunicação de resultados de uma atividade. Por sua vez, o trânsito entre os diversos registros de representação pode favorecer que os estudantes tenham maior flexibilidade e fluidez na área e, ainda, promover o desenvolvimento do raciocínio. (Brasil, 2019).

Apesar dessas indicações da BNCC e como temos apontado, por exemplo, em Kaleff (2007), no Brasil, a grande maioria dos cursos de licenciatura e de formação continuada de professores de Matemática, muitas vezes não apresenta um bom ensino das geometrias (GE e GNE). Nos procedimentos didáticos, não consideram especificamente a importância do papel das imagens mentais na elaboração dos conceitos dessa área e também deixam de lado os registros de representação envolvidos com os mesmos. Em tais práticas didáticas, geralmente, não são consideradas as diferentes representações linguísticas na elaboração de um conceito matemático, nem levam o licenciando a realizar análises e comparações de sistemas axiomáticos diversos, com outras regras e interpretações além da euclidiana. Ainda quando são trabalhados conteúdos não-euclidianos da geometria elíptica ou das hiperbólicas, o foco dessas práticas é somente nos procedimentos dedutivos relacionados à demonstração de teoremas.

Pesquisas realizadas por nós, ao longo de duas décadas no âmbito da formação de professores de Matemática, tanto em cursos de especialização presencial quanto no ensino à distância, nos permitem fazer uma afirmação pouco animadora e preocupante: menos de 40% dos profissionais, com cerca de 2 a 10 anos de formados, tiveram alguma introdução às GNE no seu curso de graduação. Sendo que esse índice era um pouco melhor no início da década de 2000, como pode ser visto em Kaleff (2007, 2021).

Durante essas duas últimas décadas, também pesquisamos como a principal ferramenta didática do professor, ou seja, os livros didáticos, tratam o tema GNE. Observamos que os modelos finitos de Young e Fano podem ser encontrados em livros universitários, principalmente entre os autores brasileiros pioneiros dos tratamentos axiomáticos que modificam os axiomas euclidianos, como Barbosa (2005); no entanto, isso não acontece nos livros para o Ensino Médio. É preciso ressaltar que, em Portugal, as geometrias finitas apareceram nos livros didáticos para esse nível de ensino já no final da década de 1990 (Jorge et al., 1999). Por sua vez, em Andrade (2013) encontramos uma interessante introdução à geometria hiperbólica com o modelo de Poincaré, que antes de entrar em apresentação dedutivas desse modelo de GNE, apresenta uma instigante leitura iniciando com o relato de fatos históricos, um resumo das ideias e revisão de Riemann da GE, como ainda os principais resultados que ligam a GE às geometrias hiperbólicas estabelecendo as semelhanças entre as duas.

Por outro lado, um modelo interessante de GNE foi introduzido em 2002, no Brasil, por Antônio J. Lopes Bigode, que pode ser visto em Bigode (2002) com o nome de "geometria do taxista", em livro didático para a antiga 8ª série (atual 9º ano do Ensino Fundamental). No entanto, em relação aos livros didáticos recentemente mais solicitados pelas escolas públicas ao Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio, isso ainda não acontece. Analisamos as três coleções de livros mais solicitadas pelos professores entre 2006 e 2008; e as de 2019. Alguns dos resultados dessas análises estão resumidos em Kaleff et al. (2008) e Kaleff et al. (2010), e observamos que os livros tratam somente do aparecimento histórico das GNE, geralmente em textos apresentados como leituras complementares, sem referências à sua constituição axiomática; enquanto que a abordagem à geometria dos fractais se apresenta em algumas situações, em exercícios motivadores.

Para finalizarmos, com vistas a preencher lacunas referentes às GNE na formação do professor e nos livros didáticos, tecemos considerações sobre alguns exemplos que podem ser levados pelo professor a alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e para os do Ensino Médio.

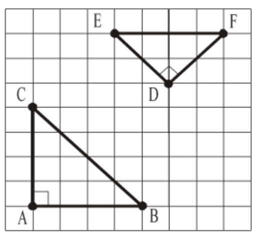
EXEMPLOS DE MODELOS NÃO EUCLIDIANOS PARA A ESCOLA

Entre os sistemas possíveis de serem levados para a escola, cabe lembrar uma geometria criada com fins didáticos pelo professor americano Eugene Krause e designada em inglês por *Taxicab Geometry*, segundo Krause (1975). Em língua portuguesa, esse sistema geométrico é designado por "geometria do motorista do táxi", "geometria pombalina" como em Jorge et al. (1999), "geometria do taxista" como em Bigode (2002), ou ainda, como denominamos, "geometria do táxi" (GT). A GT tem por base teórica a adaptação de uma métrica singular, pertencente a uma família de espaços métricos criados pelo matemático alemão Hermann Minkowski (1864 - 1909), ainda no século XIX. Assim, na GT, se calcula a distância (dt) entre dois pontos por meio da soma de dois valores numéricos absolutos, isto é, medindo-se o comprimento dos menores caminhos percorridos, em trechos horizontais e verticais, considerados segundo um determinado referencial. Por outro lado, lembramos que, na GE, considera-se a distância (euclidiana) entre dois pontos como sendo o comprimento do segmento de reta que os une, obtida, portanto, com o auxílio do Teorema de Pitágoras.

Comungando com outros educadores matemáticos, propomos em Kaleff (2016) e Kaleff et al. (2004), o ensino da geometria do táxi (GT) na escola por várias razões: ela pode ser apresentada com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno e para a formação do cidadão, pois se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço da sala de aula e até das ruas. A GT pode ser modelada por meio de uma maquete de um bairro de uma cidade e representada em um mapa como uma malha quadriculada, o que possibilita a leitura do desenho e do entendimento da organização física do bairro, respeitando-se os limites físicos das construções, estabelecidos por meio de ruas, paralelas ou perpendiculares entre si. Segundo enfatiza Fossa (2003), a GT modela mais fielmente a "geografia urbana" do que a própria GE.

Embora a GT pouco difere conceitualmente da GE, pois o faz apenas pela modificação da definição da distância (dt), essa pequena diferença teórica provoca uma grande mudança nos gráficos das figuras em relação aos traçados euclidianos. A observação conjunta de ambas as geometrias, permite ao aluno perceber variações das formas e tamanhos entre os desenhos padronizados da GE e aqueles das novas figuras na GT. Por exemplo, ainda que apresentemos o conceito de "circunferência" com uma mesma definição nas duas geometrias, ele permite duas formas de traçados, um deles inusitado: na GE, temos a curva padrão "redondinha*", mas na GT, se apresenta como um *"quadrado*". Essas variações de traçados dos desenhos podem ser percebidas até mesmo por jovens adolescentes.

Sendo a GT uma GNE, permite ainda observarmos facilmente a negação de um dos axiomas euclidianos de congruência, aquele conhecido como LAL: "Se dois triângulos ABC e DEF têm lado, ângulo e lado consecutivos respectivamente congruentes, então estes dois triângulos são congruentes". Na Figura 1, damos um exemplo, no qual consideramos dois triângulos retângulos cujos catetos têm a mesma distância "dt", no entanto, tais triângulos não são congruentes na GT.



$\hat{A} = \hat{D} = 90°$

Segmentos	Distância do Táxi d_T
AB	d_T (A,B) = 4
BC	d_T (B,C) = 8
AC	d_T (A,C) = 4
DE	d_T (D,E) = 4
EF	d_T (E,F) = 4
DF	d_T (D,F) = 4

Figura 1. Triângulos na GT, que negam o axioma euclidiano LAL Fonte: Kaleff (2016).

Apresentamos, nas Figuras 2, 3 e 4, parte do primeiro "Caderno de Atividades", que compõe uma coleção de textos com atividades as quais também se encontram nas nossas publicações citadas anteriormente. Com essas atividades buscamos levar o aluno a notar uma característica interessante da GT a qual se diferencia na GE, ou seja: as distâncias podem ter relações (> ou =) entre os valores diferenciadas, conforme a localização dos pontos. Isso pode ser observado na maquete do bairro: quando os prédios estão localizados em uma mesma rua, o valor da distância entre eles, na GE, coincide com o da GT; no entanto, quando os prédios estão em ruas diferentes, o valor da distância, na GT, é maior do que o da GE.

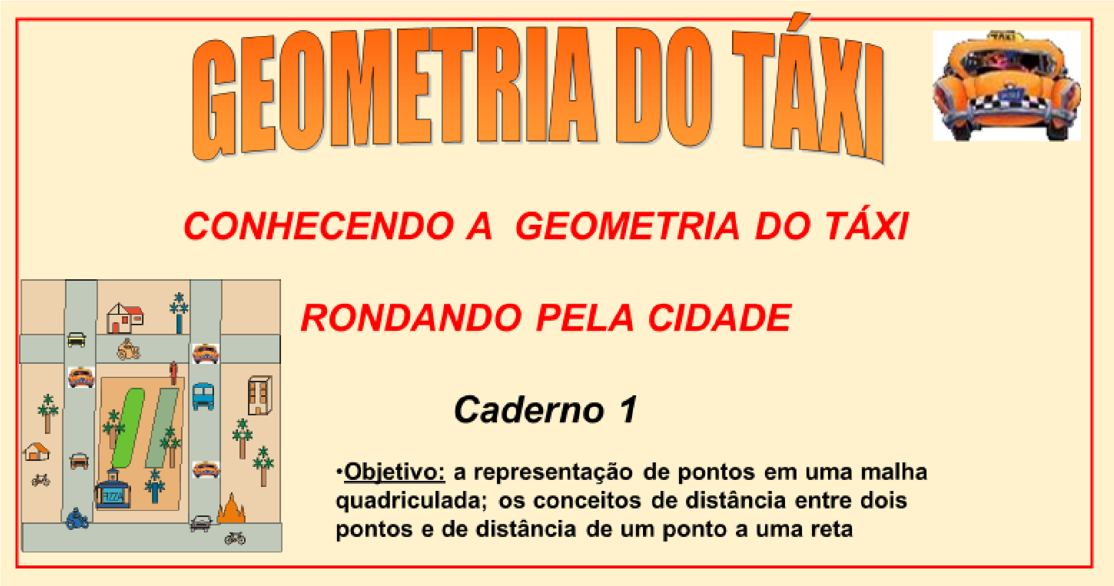
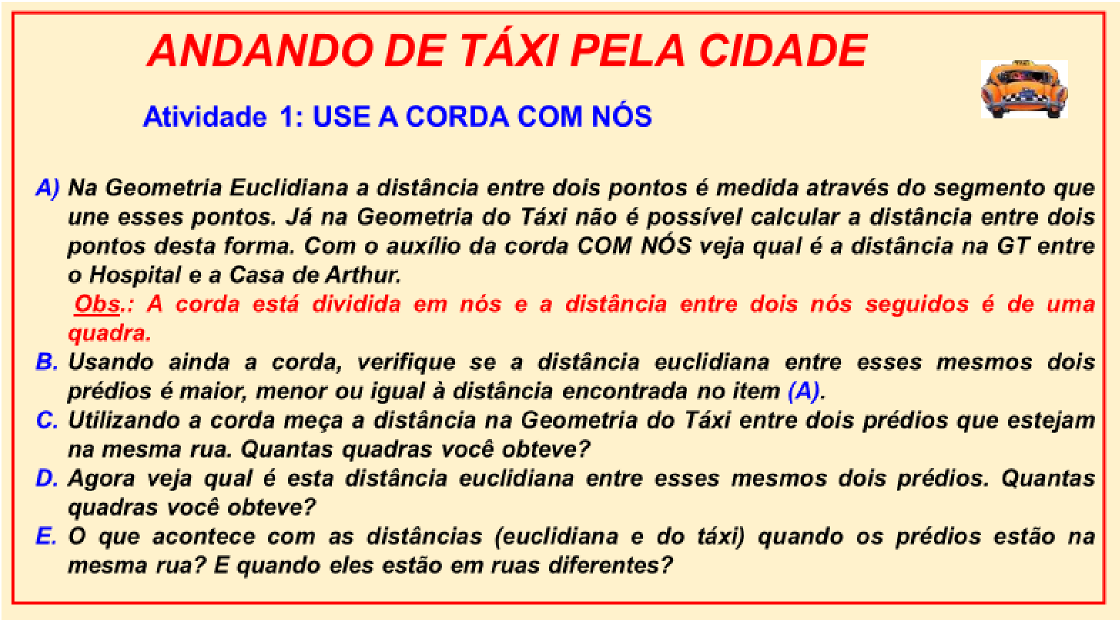


Figura 2. Caderno de Atividades da GT - Página 1. Fonte: a autora.

Figura 3. Caderno de Atividades da GT - Página 2. Fonte: a autora.



ANDANDO DE TÁXI PELA CIDADE

Atividade 1: USE A CORDA COM NÓS

A) ***Na Geometria Euclidiana a distância entre dois pontos é medida através do segmento que une esses pontos. Já na Geometria do Táxi não é possível calcular a distância entre dois pontos desta forma. Com o auxílio da corda COM NÓS veja qual é a distância na GT entre o Hospital e a Casa de Arthur.***

Obs.: A corda está dividida em nós e a distância entre dois nós seguidos é de uma quadra.

B. ***Usando ainda a corda, verifique se a distância euclidiana entre esses mesmos dois prédios é maior, menor ou igual à distância encontrada no item (A).***

C. ***Utilizando a corda meça a distância na Geometria do Táxi entre dois prédios que estejam na mesma rua. Quantas quadras você obteve?***

D. ***Agora veja qual é esta distância euclidiana entre esses mesmos dois prédios. Quantas quadras você obteve?***

E. ***O que acontece com as distâncias (euclidiana e do táxi) quando os prédios estão na mesma rua? E quando eles estão em ruas diferentes?***

Figura 4. Caderno de Atividades da GT - Página 3. Fonte: a autora.

Por sua vez, Fossa (2003) e Noronha (2006) apresentam extensas coleções de atividades para a sala de aula envolvendo o traçado de uma cidade e o desenho de mapas traçados sobre duas redes diferentes. Uma rede quadriculada dá origem à chamada "geometria urbana" e uma rede isométrica à "geometria isoperimétrica". Com base em uma pesquisa bem fundamentada na experimentação, com estudantes do último ano do Ensino Fundamental, Noronha apresenta uma proposta didática baseada na modelagem matemática dessas duas geometrias e na resolução de problemas, com vistas à construção do entendimento dos conceitos de circunferência, elipse e outras curvas, a partir da intuição.

Existem outras GNE que têm sido pesquisadas com vistas ao ensino fundamental. É o caso da "geometria da esfera", cuja interdisciplinaridade é com a geografia. Segundo Martos-Rodrigues (2016), em estudos baseados em experiências envolvendo turmas do último ano do fundamental e realizadas desde 2002, essa educadora matemática fez uso de vários materiais manipuláveis, utilizando também um recurso denominado "esfera de Lénárt", que possibilitam modelar a reta na forma de um círculo máximo de uma esfera, bem como permitem comparar distâncias e medidas de ângulos na GE e na geometria da esfera.

À GUISA DE CONCLUSÃO: UMA ESPERANÇA

Com base no aqui relatado, como já temos pontuado, acreditamos que os formadores de professores e os livros didáticos deveriam considerar as dificuldades apontadas pelos educadores matemáticos, tanto às relacionadas às representações euclidianas, quanto às diversas formas gráficas pelas quais os novos conteúdos geométricos não euclidianos podem ser representados. Por outro lado, nos cursos de formação (inicial ou continuada) de professores, estes novos conteúdos não deveriam ser (re)visitados somente por meio de noções e desenvolvimentos lógicos dedutivos constitutivos da Matemática, independentes das representações e linguagens, mas também deveriam ser levadas em consideração aquelas dimensões advindas das relações entre o ensino e a aprendizagem pertinentes à Educação Matemática.

Temos a esperança que este texto possa ajudar na aceitação da possibilidade de se desenvolver o pensamento científico por meio da introdução às GNE, nos nossos meios escolares, pois mostramos que existem caminhos para que outras geometrias, além da euclidiana, possam ser introduzidas até mesmo nas escolas do Ensino Básico, todavia é necessário que os professores estejam preparados para tanto e os livros didáticos as considerem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade, P. (2013) Introdução à geometria hiperbólica: O modelo de Poincaré. Rio de Janeiro, SBM.

Barbosa, J. L. (2005) Geometria Euclidiana Plana. 2 ed. Rio de Janeiro, SBM.

Barbosa, R. M. (2007) Descobrindo a geometria fractal: Para a sala de aula. Campinas, Autêntica.

Bigode, A. L. (2002) Matemática hoje é feita assim, 8ª série. São Paulo, FTD.

Blumenthal, L. M. (1961) A modern view of geometry. Londres, Freeman.

Brasil (2018) Ministério da Educação. BNCC - Base Nacional Comum Curricular - Ensino Médio. 5 CD-ROM. Disponível em http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc-etapa-ensino-medio. Acesso em 28/06/2021.

Carvalho, J. B. P. (1994) Os Elementos de Euclides. Cadernos da Revista do Professor de Matemática, 1. Rio de Janeiro, SBM.

Duarte, N. (1987) A realização entre o lógico e o histórico no ensino da Matemática. Universidade Federal de São Carlos, Dissertação, São Carlos.

Duval, R. (2003) Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. Alcântara Machado SD. (Ed.) Aprendizagem matemática: Representação semiótica. São Paulo, Papirus, 11-34p.

Fasheh, M. (1998) Matemática, Cultura e Poder. Zetetiké. 6. 9, 09-30p.

Fossa, J. A. (2003) Geometria Urbana. João Pessoa, UFPb Editora.

Franco de Oliveira, A. (1995) Geometria Euclidiana. Lisboa, Universidade Aberta.

Gans, D. (1973) Introduction to non-euclidean geometry. Nova York, Academic Press.

Jorge, A. M. B. et al. (1999) Infinito - Matemática nº 12. Porto, Areal Editores.

Kaleff, A. M. M. R. (2004) Da rigidez do olhar euclidiano às (im)possibilidades de (trans)formação dos conhecimentos geométricos do professor de Matemática. Faculdade de Educação. UFF. Tese, Niterói.

Kaleff, A. M. M. R. (2005) Sobre o poder de algumas palavras e imagens quando se busca avançar além das noções euclidianas mais comuns Boletim-Gepem. 45: 25-46p.

Kaleff, A. M. M. R. (2007) Registros Semióticos e obstáculos cognitivos na resolução de problemas introdutórios às geometrias não-euclidianas no âmbito da formação de professores de Matemática. Bolema. 20, 28. 69-94p. Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/bolema/?q=node/91>. Acesso em 15/06/2021.

Kaleff, A. M. M. R. (2010) Geometrias não-euclidianas na educação básica: Utopia ou possibilidade? In: X Encontro de Educação Matemática. *Anais*... Salvador. 2010.

Kaleff, A. M. M. R. (2016) Tópicos em Ensino de Geometria: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. 2 Ed. Niterói: CEAD. 223p. Disponível em:<https://drive.google.com/file/d/0B0M9GEU6FsoVcTBqNDk1eWxBRE0/view?usp=sharing_eid&ts=5787ea05> Acesso em: 15/06/2021.

Kaleff, A. M. M. R. (2021) Obstáculos cognitivos e registros semióticos frente à habilidade de visualização na aprendizagem das geometrias (euclidiana e não euclidianas). Retratos de experiências para visualização em Geometria Oliveira GWB, Izar SB. (Org). Seropédica, Edur/UFRRJ, no prelo.

Kaleff, A. M. M. R. et al. (2004) Atividades introdutórias às geometrias não-euclidianas: o exemplo da geometria do táxi. Boletim. Gepem, 44: 11-42p.

Kaleff, A. M. M. R. et al. (2008) Uma análise da apresentação de retas paralelas em livros didáticos do Ensino Médio. Caderno Dá Licença. 7, 09-36p.

Kaleff, A. M. M. R. et al. (2010) Uma análise dos conteúdos de geometria em um dos livros didáticos do Ensino Médio mais utilizados pelas escolas públicas brasileiras. In: X Encontro de Educação Matemática. *Anais*... Salvador. 2010.

Krause, E. (1975) Taxicab geometry: an adventure in non-euclidean geometry. Nova York, Dover.

Lefebvre, H. (1991). Lógica formal/lógica dialética. Rio de Janeiro, Civilização Brasileira.

Martos-Rogrigues, Z. G. (2016) E quando os ângulos não fecham em 180º: as geometrias não-euclidianas. Curitiba, CRV.

Mlodinov, L. (2004). A janela de Euclides: A história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. São Paulo, Geração.

Noronha, C. A. (2006) As geometrias urbana e isoperimétrica: Uma alternativa de uso em sala de aula. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Tese, Natal.

Teixeira, A. S. (1968) Pequena introdução à filosofia da Educação: A escola progressiva ou a transformação da Escola. 5. ed. São Paulo, Nacional.

Índice Remissivo

Autores

Ana Maria Martensen Roland Kaleff

Professora titular aposentada da Universidade Federal Fluminense (UFF). Doutora em Educação e Mestre em Matemática pela UFF. Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Foi fundadora e coordenadora do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG/UFF) e do Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio (UFF). Foi coordenadora de disciplinas do Curso de Especialização a Distância Novas Tecnologias em Ensino de Matemática (NTEM/UFF) da Universidade Aberta do Brasil e professora do Curso de Mestrado Profissional em Diversidade e Inclusão do Instituto de Biologia (UFF).

Darling Domingos Arquieres

Professora da Rede Estadual de Educação - SEEDUC RJ, regente em matemática desde de 2005. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGEduCIMAT pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2019). Especialista em Educação Matemática pela PUC-RJ (2002), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense - UFF (2014). Graduado com bacharelado e bacharelado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2001). Colaboradora do Projeto Laboratório de Matemática Sustentável, onde estudou o papel do uso de objetos específicos de aprendizagem na melhoria do ensino de Matemática (2015). Desde 2005 sou professor da rede estadual do RJ. De 2018 a 2021 atuei como professora convidada na Pós-Graduação Lato Sensu em Educação Matemática e suas Aplicações no Ensino da Universidade Castelo Branco.

Daniela Mendes Vieira da Silva

Doutora pelo programa de pós graduação em Ensino de Matemática da UFRJ (PEMAT-UFRJ), mestra pelo programa de pós graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFRRJ (PPGEDUCIMAT_UFRRJ), graduada em Matemática-Licenciatura Plena pelo CEDERJ/UFF. Possuo também atualização em Mídias na Educação pela UFRJ e especialização em Educação Tecnológica pelo CEFET-RJ. Sou professora adjunta na Faculdade de Formação de Professores da UERJ, onde atuo nas licenciaturas em Matemática e Pedagogia e no Programa de Pós Graduação em Matemática (PROFMAT). Sou também pesquisadora associada no grupo de pesquisa do Instituto de Matemática da UFRJ: TIME (Tecnologias, Inclusão, Matemática e Ensino).

Lattes **Ion Moutinho Gonçalves**

Matemático, bacharelado em Matemática (1989) na Universidade Federal Fluminense (UFF). Mestre (1991) em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Doutor (2006) em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR). Pós – Doutorado (2018) em Educação Matemática desenvolvido na Simon Fraser University (SFU). Realizou pesquisas na área de Geometria Diferencial e, atualmente, faz pesquisas a respeito do conhecimento especializado do professor de Matemática. Tem grande interesse no desenvolvimento de estratégias e materiais didáticos que possam ser utilizados por professores que ensinam Matemática. Contato: 21 - 99442 4403, e-mail: ion.moutinho@gmail.com

Lattes **Fernando Celso Villar Marinho**

Professor Titular da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), coordenador do projeto de Desenvolvimento de Jogos Digitais na Educação, licenciado em Matemática (2000) na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre (2005) em Ciências pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Doutor (2014) em Educação em Ciências e Saúde pelo Instituto Nutes de Educação em Ciências e Saúde (NUTES) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Premiado no concurso Inovapps 2015 com o jogo Primogo, autor das séries de TV Os Exploradores de Kuont, Matemática em Toda Parte 2. Desenvolveu e coordenou projetos junto ao Ministério da Educação (MEC), SEEDUC/RJ, CESGRANRIO, FIRJAN e TV ESCOLA, produzindo materiais digitais e recursos tecnológicos. Avaliador no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e no Banco Nacional de Itens do INEP. Entusiasta do uso de tecnologias na educação e 'aprendedor' apaixonado pelo conhecimento, está sempre em busca de soluções criativas e de impacto para muitas pessoas. Contato:@professorfernandovillar, e-mail: fernandovillar@ufrj.br

Organizadores

André Luiz Souza Silva

Licenciado em Matemática (2004) e Especialista em Ensino de Matemática (2008) pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (2010) pelo Centro Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Rio de Janeiro (CEFET-RJ), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática (2010) pela Universidade Federal Fluminense (UFF). e-mail: andre.luiz@ifrj.edu.br.

José Carlos Gonçalves Gaspar

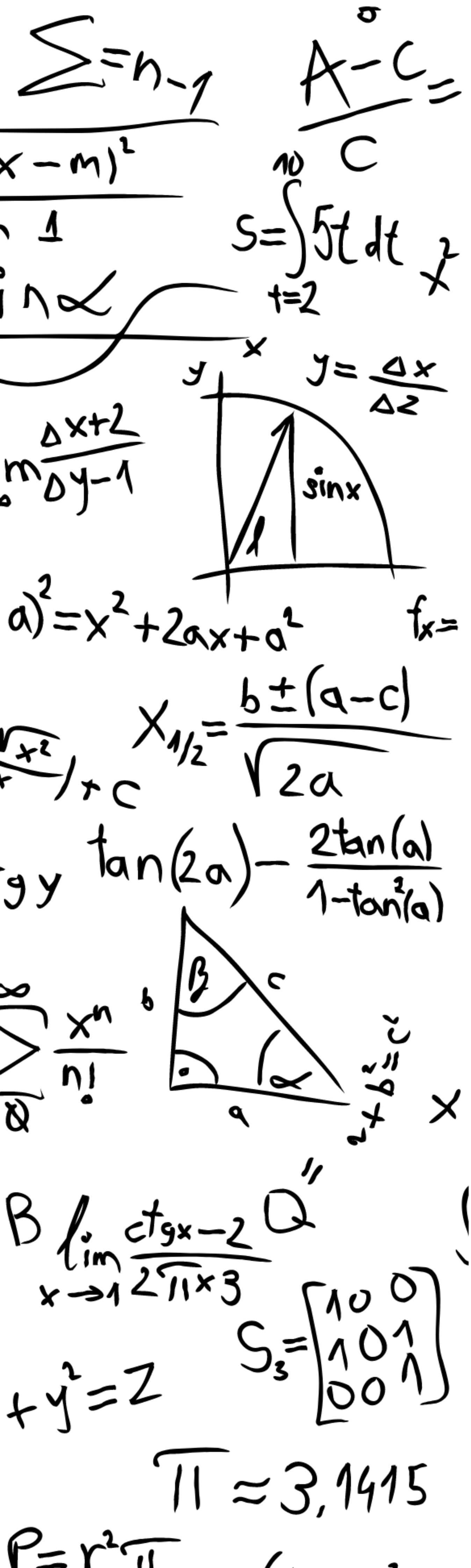
Mestre em Ensino de Ciências na Educação Básica pela Universidade do Grande Rio (Unigranrio), Especialista e Licenciado em Matemática pela UFF. Professor de Matemática na Educação Básica e Superior do IFRJ e da rede Municipal de Duque de Caxias. Membro do Projeto ConSeguir e um dos redatores da reestruturação curricular da rede municipal de Duque de Caxias (2019-2022). Autor de Materiais Didáticos pela Somos Educação e Editora Poliedro. Possui experiência em avaliação em larga escala e com Educação a Distância. Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). Contato:(21) 99881-2933, e-mail:jose.gaspar@ifrj.edu.br.

Vilmar Gomes da Fonseca

Licenciado em Matemática e Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa. Professor do IFRJ-campus Nilópolis. Tem experiência em pesquisa e extensão na área de Matemática atuando principalmente nos campos: ensino e aprendizagem da Matemática, formação de professores, tecnologias educacionais e avaliação educacional. É coordenador de área do núcleo do PIBID da Licenciatura em Matemática do IFRJ-campus Nilópolis (2020 - 2022). Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). e-mail: vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

Marcelo Silva Bastos

Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ. Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Especialista em "Ensino de Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio" pela UFF. Licenciado em Matemática pela UFRRJ. Docente do IFRJ-Campus Nilópolis atuando no Ensino Médio Técnico e no Curso de Licenciatura em Matemática. Coordenador do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ)



9 786581 460372

Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp)
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br