



# CICLO DE FORMAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

CONTRIBUIÇÕES DO ENSINO, DA  
PESQUISA E DA EXTENSÃO NA  
FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE  
MATEMÁTICA

José Carlos Gonçalves Gaspar  
André Luiz Souza Silva  
Marcelo Silva Bastos  
Vilmar Gomes da Fonseca  
Organizadores



Pantanal Editora

2022



**José Carlos Gonçalves Gaspar**  
**André Luiz Souza Silva**  
**Marcelo Silva Bastos**  
**Vilmar Gomes da Fonseca**  
Organizadores

**Ciclo de formação em ensino de  
matemática: contribuições do ensino,  
da pesquisa e da extensão na  
formação do professor de Matemática**



Pantanal Editora

2022

Copyright© Pantanal Editora

**Editor Chefe:** Prof. Dr. Alan Mario Zuffo

**Editores Executivos:** Prof. Dr. Jorge González Aguilera e Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

**Diagramação:** A editora. **Diagramação e Arte:** A editora. **Imagens de capa e contracapa:** Canva.com. **Revisão:** O(s) autor(es), organizador(es) e a editora.

### Conselho Editorial

#### Grau acadêmico e Nome

Prof. Dr. Adaylson Wagner Sousa de Vasconcelos  
Profa. Msc. Adriana Flávia Neu  
Profa. Dra. Allys Ferrer Dubois  
Prof. Dr. Antonio Gasparetto Júnior  
Profa. Msc. Aris Verdecia Peña  
Profa. Arisleidis Chapman Verdecia  
Prof. Dr. Arinaldo Pereira da Silva  
Prof. Dr. Bruno Gomes de Araújo  
Prof. Dr. Caio Cesar Enside de Abreu  
Prof. Dr. Carlos Nick  
Prof. Dr. Claudio Silveira Maia  
Prof. Dr. Cleberton Correia Santos  
Prof. Dr. Cristiano Pereira da Silva  
Profa. Ma. Dayse Rodrigues dos Santos  
Prof. Msc. David Chacon Alvarez  
Prof. Dr. Denis Silva Nogueira  
Profa. Dra. Denise Silva Nogueira  
Profa. Dra. Dennyura Oliveira Galvão  
Prof. Dr. Elias Rocha Gonçalves  
Prof. Me. Ernane Rosa Martins  
Prof. Dr. Fábio Steiner  
Prof. Dr. Fabiano dos Santos Souza  
Prof. Dr. Gabriel Andres Tafur Gomez  
Prof. Dr. Hebert Hernán Soto Gonzáles  
Prof. Dr. Hudson do Vale de Oliveira  
Prof. Msc. Javier Revilla Armesto  
Prof. Msc. João Camilo Sevilla  
Prof. Dr. José Luis Soto Gonzales  
Prof. Dr. Julio Cezar Uzinski  
Prof. Msc. Lucas R. Oliveira  
Profa. Dra. Keyla Christina Almeida Portela  
Prof. Dr. Leandro Argentel-Martínez  
Profa. Msc. Lidiene Jaqueline de Souza Costa Marchesan  
Prof. Dr. Marco Aurélio Kistemann  
Prof. Msc. Marcos Pisarski Júnior  
Prof. Dr. Marcos Pereira dos Santos  
Prof. Dr. Mario Rodrigo Esparza Mantilla  
Profa. Msc. Mary Jose Almeida Pereira  
Profa. Msc. Núbia Flávia Oliveira Mendes  
Profa. Msc. Nila Luciana Vilhena Madureira  
Profa. Dra. Patrícia Maurer  
Profa. Msc. Queila Pahim da Silva  
Prof. Dr. Rafael Chapman Auty  
Prof. Dr. Rafael Felipe Ratke  
Prof. Dr. Raphael Reis da Silva  
Prof. Dr. Renato Jaqueto Goes  
Prof. Dr. Ricardo Alves de Araújo (*In Memoriam*)  
Profa. Dra. Sylvana Karla da Silva de Lemos Santos  
Msc. Tayronne de Almeida Rodrigues  
Prof. Dr. Wéverson Lima Fonseca  
Prof. Msc. Wesclen Vilar Nogueira  
Profa. Dra. Yilan Fung Boix  
Prof. Dr. Willian Douglas Guilherme

#### Instituição

OAB/PB  
Mun. Faxinal Soturno e Tupanciretã  
UO (Cuba)  
IF SUDESTE MG  
Facultad de Medicina (Cuba)  
ISCM (Cuba)  
UFESSPA  
UEA  
UNEMAT  
UFV  
AJES  
UFGD  
UEMS  
IFPA  
UNICENTRO  
IFMT  
UFMG  
URCA  
ISEPAM-FAETEC  
IFG  
UEMS  
UFF  
(Colômbia)  
UNAM (Peru)  
IFRR  
UCG (México)  
Mun. Rio de Janeiro  
UNMSM (Peru)  
UFMT  
Mun. de Chap. do Sul  
IFPR  
Tec-NM (México)  
Consultório em Santa Maria  
UFJF  
UEG  
FAQ  
UNAM (Peru)  
SEDUC/PA  
IFB  
IFPA  
UNIPAMPA  
IFB  
UO (Cuba)  
UFMS  
UFPI  
UFG  
UEMA  
IFB  
  
UFPI  
FURG  
UO (Cuba)  
UFT

Conselho Técnico Científico

- Esp. Joacir Mário Zuffo Júnior
- Esp. Maurício Amormino Júnior
- Lda. Rosalina Eufrausino Lustosa Zuffo

Ficha Catalográfica

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)**

C568      Ciclo de formação em ensino de matemática [livro eletrônico] : contribuições do ensino, da pesquisa e da extensão na formação do professor de Matemática / Organizador José Carlos Gonçalves Gaspar... [et al.]. – Nova Xavantina, MT: Pantanal, 2022. 84p.

Formato: PDF

Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

ISBN 978-65-81460-37-2

DOI <https://doi.org/10.46420/9786581460372>

1. Simetria. 2. Matemática – Estudo e ensino. I. Gaspar, José Carlos Gonçalves. II. Silva, André Luiz Souza. III. Bastos, Marcelo Silva. IV. Fonseca, Vilmar Gomes da.

CDD 510.7

**Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422**



Nossos e-books são de acesso público e gratuito e seu download e compartilhamento são permitidos, mas solicitamos que sejam dados os devidos créditos à Pantanal Editora e também aos organizadores e autores. Entretanto, não é permitida a utilização dos e-books para fins comerciais, exceto com autorização expressa dos autores com a concordância da Pantanal Editora.

**Pantanal Editora**

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000.  
Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil.  
Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp).  
<https://www.editorapantanal.com.br>  
[contato@editorapantanal.com.br](mailto:contato@editorapantanal.com.br)

## Prefácio

Estimado(a) Leitor(a),

O que é apresentado nesta obra é resultado do trabalho docente incessante e de alta qualidade durante a maior crise sanitária desde a gripe espanhola no século XX. A pandemia do novo coronavírus causou a disseminação mundial da Covid-19, o isolamento social, *lockdowns* ao redor do mundo, quarentenas e milhares de contaminações e óbitos que poderiam ter sido evitados. Mas como as contaminações e óbitos poderiam ser evitados se pouco se conhecia acerca do novo vírus?

A resposta está também em cada capítulo desta obra. Contaminações e óbitos poderiam ter sido evitados se os conhecimentos científicos produzidos em diversas ciências, entre as quais a Matemática, tivessem sido levados em consideração desde o início da pandemia. Uma lição preciosa e dura que podemos tirar de 2 anos de pandemia é que ouvir a Ciência, desenvolver o pensamento científico, educar pelas práticas científicas remotas, híbridas e semipresenciais, além de valorizar os profissionais da educação brasileira é a senha para que em novas ondas pandêmicas estejamos mais preparados.

Assim, cada educador(a) que escreveu suas pesquisas nesta obra científica representa a força e a competência do profissionalismo docente brasileiro, promovendo ações remotas durante a pandemia com tecnologias móveis com materiais adaptados e lúdicos para atrair a atenção de milhares de estudantes que tiveram que estudar em suas casas, muito deles com extrema dificuldade de conexão de internet, mas sempre com o amparo e a dedicação dos professores e de suas famílias.

Destacamos as ações docentes que buscaram reduzir a desigualdade social e tecnológica em muitos lares brasileiros com ações de alfabetização científica online promovendo oficinas, *lives*, aulas síncronas e assíncronas em ambientes virtuais de aprendizagem, em suas universidades e institutos federais, para que cada estudante pudesse continuar seus estudos e compreender que somente com um pensamento crítico é possível combater as atrocidades promovidas por dois vírus.

Um vírus, o da covid-19, que a ciência conseguiu combater por meio da criação de vacinas em centros de pesquisa de instituições públicas brasileiras como o Butantan e a Fiocruz em parcerias com milhares de pesquisadores de universidades públicas brasileiras e estrangeiras. O segundo vírus que é tão letal quanto o primeiro que é o vírus da desinformação que geram as denominadas *fake news*, também só é possível ser combatido com uma “vacina”, a alfabetização científica capaz de gerar cidadãos críticos e capazes de ler, e interpretar conhecimentos, informações e notícias falsas.

Para combater ambos os vírus, ficou claro durante dois anos de pandemia que a Educação e a atuação de Educadore(a)s comprometidos com a Ciência promoverá estabilidade e segurança nas futuras ações híbridas que permearão o denominado “novo normal”. Nessa nova caminhada, mais do que antes, a ação dos educadores será decisiva em aulas híbridas, contextos inter e transdisciplinares, com metodologias ativas, em aulas inclusivas e propostas de sala de aula invertida, realização de projetos de

extensão, ações de iniciação científica e salas de aula transformadas em laboratórios para investigação científica.

Por fim, que todos o(a)s educadore(a)s brasileiro(a)s se inspirem nos conteúdos, saberes e conhecimentos problematizados nos capítulos dessa importante obra, elaborada para a divulgação científica.

Que mesmo diante dos maiores desafios sociais e profissionais cultivemos cada vez mais em nossas práticas educativas o verbo *esperançar* ensinado e exemplificado pelo nosso educador e patrono da educação Paulo Freire, *esperançar* no sentido de seguirmos em frente cientes dos aprendizados durante a pandemia e cientes de que na pós-pandemia o caminho deve ser iluminado pelas luzes da Ciência.

Que estejamos unidos a Todo(a)(e)s que creem que a Educação pode libertar qualquer povo das garras de regimes totalitários e neofascistas que maltratam e excluem.

Juiz de Fora, 15 de abril de 2022.

**Marco Aurélio Kistemann (Pesquisa de Ponta-UFJF)**

## Sumário

<b>Prefácio</b>	<b>4</b>
<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>Capítulo I</b>	<b>11</b>
Simetria Axial na pandemia da covid-19: uma proposta didática com recurso do uso de dobraduras e o GeoGebra	11
<b>Capítulo II</b>	<b>28</b>
Práticas Didáticas Interativas e Avaliativas no Ensino Remoto	28
<b>Capítulo III</b>	<b>44</b>
Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na Escola Básica: Por quê? Para quê?	44
<b>Capítulo IV</b>	<b>63</b>
Problematização dos números reais com aplicativos: Descobrimo lacunas na reta numérica	63
<b>Índice Remissivo</b>	<b>80</b>
<b>Autores</b>	<b>81</b>
<b>Organizadores</b>	<b>83</b>

O laboratório itinerante é uma ação do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) que se iniciou em parceria com Pibid e tem por objetivo levar aos alunos de escolas públicas do entorno do campus metodologias norteadas pelas tendências em Educação Matemática que auxiliem na aprendizagem de conceitos matemáticos. Ações do laboratório itinerante acontecem desde 2018 e têm contribuído para o estímulo à prática da pesquisa para alunos do curso de licenciatura em Matemática da instituição, além de auxiliar os estudantes a superarem algumas dificuldades que surgem durante a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

No momento, o laboratório tem realizado parcerias com algumas escolas da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro que se localizam nos municípios de Mesquita e Nilópolis. As atividades realizadas com os alunos das escolas envolvidas exploram tanto conceitos matemáticos de forma interdisciplinar, como também jogos e sequências de ensino com uso de materiais manipulativos industrializados ou construídos com material de baixo custo. A aplicação dessa metodologia tem contribuído para aproximar o licenciando da realidade que vai atuar, pois, em muitas realidades, a escola não dispõe de recursos didáticos que possibilitem uma construção significativa de conceitos matemáticos. Nesse sentido, o uso desses recursos a partir de materiais de baixo custo pode contribuir para que os futuros professores sejam instrumentalizados quanto à construção de materiais que atendam às diferentes necessidades dos alunos quanto à aprendizagem da Matemática.

Vendo o bom andamento do projeto e a possibilidade de ampliação dele, em 2019 o projeto foi submetido a fomento à Coordenação de Extensão (Coex) do IFRJ, sendo aprovado em dezembro desse mesmo ano. Durante o início de 2020, ainda no período de planejamento das ações com as escolas parceiras, houve a necessidade de paralisação das atividades presenciais por conta da epidemia da covid-19. Nesse instante, foi necessário reestruturar o projeto para que suas ações fossem em formato remoto. Dessa maneira, realizamos uma oficina pelo *google meet* na XXV Semana de Tecnologia (Sematec), com colaboração da equipe do projeto *Desenvolvimento Jogos Digitais na Educação*<sup>1</sup> (DJDE) do Colégio de Aplicação da UFRJ e do Projeto de Pesquisa *Pesquisa de Ponta, ligado* à Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), com o título *Despertando para educação financeira: uma introdução gamificada*. Nela houve a participação de alunos do ensino médio, do curso de licenciatura em Matemática, professores de Matemática da Educação Matemática e uma professora de ensino superior.

Além da participação na Sematec, foi desenvolvido um ciclo de formação com transmissão pelo canal do Laboratório Ensino de Matemática (LabEM) no YouTube, com quatro encontros. No primeiro encontro, o professor Fernando Villar (CAP-UFRJ) ministrou a oficina *Práticas Didáticas Interativas e*

---

<sup>1</sup> Site do projeto disponível em <https://www.jogosdigitais.cap.ufrj.br/>

*Avaliativas no Ensino Remoto*<sup>2</sup>. Nela ele apresentou um pouco da sua experiência com os alunos do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro durante a pandemia do coronavírus. O segundo encontro foi com o professor Luiz Felipe Lins (SME-RJ), por meio da palestra *Desenvolvendo competências e habilidades por meio da metodologia de projetos nas aulas de matemática*<sup>3</sup>, que falou a respeito da sua experiência com alunos da rede municipal de educação da cidade do Rio de Janeiro, incluindo o projeto que o conduziu ao “Prêmio Shell de Educação Científica” em 2020. No terceiro encontro, a professora Ana Kaleff (UFF) proferiu a palestra *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*<sup>4</sup>, em que apresentou reflexões sobre o ensino da geometria não euclidiana na escola básica frente às orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que se destaca a importância do ensino e aprendizagem da geometria não euclidiana na escola básica no contexto da escola do século XXI. No quarto e último encontro do ciclo, as professoras Daniela Mendes (Uerj – Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) e Darling Domingos (Laboratório Sustentável de Matemática/Seeduc) desenvolveram a oficina *Ensino de números reais com multimeios*<sup>5</sup>.

Por fim, em junho de 2021, foi realizada a oficina *Aprendendo Geometria com as Mãos* em formato remoto. Tal ação foi em parceria com uma escola pública da rede estadual de ensino do Rio de Janeiro, localizada no município de Mesquita, na Baixada Fluminense, tendo a participação de alunos do 6º. ao 9º. ano do ensino fundamental. Ela ocorreu em dois encontros, que permitiram o desenvolvimento do conceito de simetria com apoio de dobraduras.

Como fruto de parte das ações realizadas durante o projeto, apresentamos este *ebook* composto por quatro capítulos, que serão descritos a seguir:

No primeiro capítulo, Geometria na Pandemia, os autores André Luiz Souza Silva, José Carlos Gonçalves Gaspar e Vilmar Gomes da Fonseca apresentam uma proposta didática inovadora para o ensino de simetria axial, com base em uma sequência didática de quatro tarefas exploratórias com recurso de dobraduras, recortes e uso de tecnologias digitais. Essa proposta didática resulta de ações do LabEM Itinerante do IFRJ/Campus Nilópolis, a partir da realização de um projeto de extensão realizado numa escola pública do município de Mesquita-RJ, e teve como base uma experiência de ensino que foi planejada e executada em contexto de ensino remoto, durante o advento da pandemia da covid-19 nessa escola. Os autores apresentam as premissas que influenciaram a construção da proposta didática, a saber: (i) o contexto da pandemia e o seu conjunto de limitações e desafios impostos; (ii) a escolha de conteúdo

---

<sup>2</sup> Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=fYOgdh15mL4&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi>, com 1644 visualizações em 15 de abril de 2022.

<sup>3</sup> Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=oqJohU8Yhsw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=2>, com 750 visualizações em 15 de abril de 2022.

<sup>4</sup> Disponível em [https://www.youtube.com/watch?v=YxeW-2q\\_TMM&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=3](https://www.youtube.com/watch?v=YxeW-2q_TMM&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=3), com 755 visualizações em 15 de abril de 2022.

<sup>5</sup> Disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=6yOFpdqD-tw&list=PLjcNnx9286N-NarGpF9dTASmdtrv-Elpi&index=4>, com 583 visualizações em 15 de abril de 2022.

de geometria que considera as ideias de Felix Klein (1849-1925) no programa Erlangen; e (iii) práticas emergentes para o ensino de matemática que consideram o uso de recursos manipuláveis e tecnológicos. A seguir, apresentam uma descrição comentada da proposta didática e seus objetivos, e finalizam propondo reflexões sobre possibilidades de criação de ambientes de ensino promotores de aprendizagens significativas.

No segundo capítulo, intitulado *Práticas Didáticas Interativas e Avaliativas no Ensino Remoto*, o autor, a partir do Ensino Remoto Emergencial (ERE) que surgiu no ano de 2020 como alternativa para dar continuidade às atividades escolares e, simultaneamente, preservar a saúde de estudantes e docentes, durante a pandemia causada pelo vírus Sars-CoV-2, discute que inicialmente muitos docentes se posicionaram contrários ao ERE porque entendiam que não seria possível fazer ensino remoto de qualidade na educação básica. No entanto, com o passar dos dias e o estudo e a dedicação de milhares de docentes em todo o mundo, foram criados caminhos alvissareiros para a educação frente aos desafios que se apresentaram. Neste texto são apresentadas algumas práticas didáticas desenvolvidas e utilizadas por docentes do Colégio de Aplicação da UFRJ, de forma que o potencial dos recursos digitais fosse demonstrado por meio das avaliações positivas de estudantes, responsáveis, licenciandos e docentes de diferentes disciplinas.

No terceiro capítulo, cujo tema é *Conceitos elementares de Geometrias não euclidianas na escola básica: por quê? Para quê?*, a autora espera responder a algumas questões que acredita serem pertinentes a esse tempo da pandemia provocada pelo novo coronavírus, bem como para o futuro, com os ensinamentos híbrido e remoto. Apresenta um conjunto de questões relacionadas às geometrias não euclidianas (GNE) que podem levar o(a) leitor(a) a pensar não ter ligação com a pandemia. Para responder ao “por quê?” do título, a autora apresenta como entende a criação de novos conhecimentos científicos e as lógicas envolvidas com as ações relacionadas ao pensamento científico que os embasam, à Educação e à Matemática. Para tanto, inicia com uma breve introdução histórica à geometria euclidiana; em seguida, contextualiza como surgiram as GNE e as consequências desse surgimento para as Ciências e para a pandemia. Para responder ao “para quê?” se introduzir as GNEs no Ensino Médio, analisa como o pensamento científico e o ensino das representações matemáticas são apresentados na Base Nacional Comum Curricular, bem como eles se interligam em relação à pandemia; elenca alguns resultados de pesquisas realizadas, no âmbito da formação de professores de Matemática e do livro didático; e finaliza com considerações sobre exemplos de GNE que podem ser utilizados na escola básica.

A fim de contribuir para a apropriação das tecnologias digitais por parte dos professores de matemática e para seu uso com intencionalidade didática, o texto do quarto capítulo, *Problematização dos números reais com recursos da Geometria Dinâmica: Descobrimos lacunas na reta numérica*, introduz um conjunto de atividades educacionais pensadas para a problematização e a aprendizagem dos números reais com o uso de recursos tecnológicos escolhidos de maneira a propiciar uma abordagem interativa e dinâmica do tema.

São três construções eletrônicas, chamadas de *applets*, que favorecem a exploração de importantes orientações didáticas.

Para finalizar, agradecemos à direção do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro – Campus Nilópolis pelo apoio dado a esse projeto de extensão por meio de fomento oriundo do edital interno nº 11.

# Simetria Axial na pandemia da covid-19: uma proposta didática com recurso do uso de dobraduras e o GeoGebra

Recebido em: 30/3/2022

Aceito em: 30/4/2022

 10.46420/9786581460372cap1

André Luiz Souza Silva<sup>1</sup> 

José Carlos Gonçalves Gaspar<sup>1</sup> 

Vilmar Gomes da Fonseca<sup>1</sup> 

## INTRODUÇÃO

O recente contexto da pandemia mundial da covid-19, causada pelo novo coronavírus (Sars-Cov-2), suscitou várias questões pedagógicas e/ou relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Os verbos inovar (Rodrigues et al., 2021; Silva et al., 2020), reformular, repensar (Engelbrecht et al., 2020), adequar, ampliar e outros foram recursivamente preenchendo o cotidiano e a pesquisa em registros de experiências que refletiam as condições impostas pela pandemia necessárias para o desenvolvimento dos conhecimentos próprios da matemática, remetidos ao ambiente escolar nas suas diversas relações (professor-ensino, aluno-aprendizagem, professor-aluno-conhecimentos...).

A urgência da prática, e conseqüentemente da troca de experiências que suscitasse sucesso e/ou melhores resultados diante da caracterização experimental que vivemos, pode agora ser comparada a outras urgências, que, no cenário geral do ensino da matemática escolar, em particular da geometria, foram naturalmente sendo trazidos à tona como uma confluência entre necessidade, eficiência, novos e antigos rumos.

Várias pesquisas em educação em todo o mundo reconheceram em panorama internacional problemas e desafios associados à transição abrupta do ensino presencial para o ensino remoto.

Entre as principais dificuldades destacam-se as condições para a operacionalização do ensino a distância, nomeadamente os problemas de rede, a falta de equipamentos adequados e a diversidade (e desigualdade) no acesso a recursos tecnológicos por parte de professores e alunos (Judd et al., 2020; Zhang et al., 2020 *apud* Flores et al., 2021)

Neste texto, apresentamos uma experiência que foi concebida num projeto de extensão que, durante o advento da pandemia, passou a considerar três grandes influências:

---

<sup>1</sup> Instituto Federal Educ. Ciência e Téc. do Rio de Janeiro

1. o contexto da pandemia e o seu conjunto de limitações e desafios impostos;
2. uma escolha de conteúdo em geometria que considera as ideias de Felix Klein (1849 – 1925) no programa Erlangen;
3. as reflexões sobre as práticas emergentes que consideravam os recursos manipuláveis ao considerar as influências 1 e 2.

Pensada como uma ação do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM) do curso de Licenciatura em Matemática do IFRJ, campus Nilópolis, tal experiência teve como objetivo propor reflexões sobre possibilidades de vencer as limitações decorrentes da pandemia e, ao mesmo tempo, propor perspectivas sobre os conteúdos e as práticas pedagógicas específicas aos respectivos conhecimentos em geometria e a realidade da escola.

Nesse sentido, no que se refere às Transformações Geométricas (isometrias), pensou-se a proposta sob a influência das ideias de Felix Klein no programa Erlanger (Fernandes, 1984), tomando a possibilidade de se ter as isometrias do plano euclidiano dadas pelas transformações geométricas de Translação, Simetria e Rotação como conceitos centrais na constituição dos conhecimentos em geometria, em particular da constituição de processos de aprendizagem que privilegiam a construção da argumentação em Matemática. Dada a participação ativa de monitoras voluntárias e bolsistas, este estudo também inferiu sobre a construção de novas perspectivas para a prática do professor de matemática.

Nossa hipótese foi que um cenário profícuo de rupturas e novos contratos didáticos estão se estabelecendo com base nas necessidades da prática docente do professor de matemática na pandemia e, por isso, algumas dessas especificidades mostram uma configuração especial que pode ser bastante rica para a possibilidade de aproximar a geometria presente na matemática escolar aos conhecimentos contemporâneos nesta área.

O projeto de extensão ocorreu em conjunto com o CIEP 111 Gelson Freitas, localizado na cidade de Mesquita, no estado do Rio de Janeiro. Essa instituição, além de pertencer à Baixada Fluminense, entorno geográfico do IFRJ, tem um histórico de parcerias com projetos de extensão, de estágio e com o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) oriundos do IFRJ.

Neste núcleo de extensão do IFRJ participaram três licenciandas que se encontravam em momentos diferentes de formação. A primeira cursava o 2º período, e era considerada recém-ingressa, mas já estava participando do PIBID. A segunda, que já havia cumprido quase 50% dos créditos do curso e estava realizando na mesma época, em tal escola, o PIBID. E uma terceira, que participou do programa

de iniciação à docência Residência Pedagógica (RP) e que está encerrando o seu Trabalho de Conclusão de Curso.

A ação do projeto foi realizada durante o mês de junho de 2021, tendo sido planejada em meses anteriores, juntando os argumentos teóricos aos dados trazidos pela professora regente da escola e algumas considerações das licenciandas que realizavam o PIBID na mesma escola. O quadro informativo indicava que a escola estava com dificuldades em atingir de maneira satisfatória os alunos, mas, em consequência da parceria com o projeto de extensão, acreditávamos que outras formas de agir naquele momento poderiam significar melhoria nas ações e nas formas de relacionamentos da escola com os seus alunos.

A ação realizada vai de encontro ao objetivo do projeto de extensão, que é oferecer aos alunos das escolas públicas do entorno do IFRJ um ambiente em que se desperte o prazer de descobrir e aprofundar conhecimentos de uma forma lúdica, bem como propiciar a integração do licenciando em Matemática com as unidades escolares do entorno do campus, permitindo, assim, que esse futuro professor tenha a oportunidade de refletir sobre o ensinar e aprender Matemática na Educação Básica.

Propomos aqui a apresentação dessa experiência pela descrição de nossas influências, de nossa concepção de ensino para as isometrias, seguida de uma análise dos recursos materiais e tecnológicos empregados na ação. Os resultados dos contributos e limitações dessa experiência para a compreensão dos estudantes sobre simetria axial, embora fazendo parte da investigação mais alargada a que referimos no âmbito do projeto de extensão, por questões de limitação de espaço neste texto, serão apresentados e discutidos em outras publicações.

A referida descrição se inicia com um olhar sobre o ensino de matemática, com base em determinações documentais das reformas das décadas de 30 e 40 e, mais tarde, a reforma conhecida como Matemática Moderna, nas décadas de 1960 e 1970, as quais nos mostram que a disciplina de matemática na escola básica sofreu mudanças profundas que, ainda hoje, quase um século após a primeira dessas reformas, ao considerarmos a prática dos professores com relação à Geometria, podemos considerar em desenvolvimento.

Para elucidar essa premissa, realizamos uma breve digressão, com olhar centrado em pontos que incidem diretamente sobre as Transformações Geométricas. Omitimos uma descrição ampliada que complementa nossa exposição ao considerar a história e a história do ensino da Matemática no Brasil presente em Pavanello (1989).

## ENSINO DE ISOMETRIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA BREVE DIGRESSÃO HISTÓRICA

Na Reforma Campos, segundo Soares et al. (2004) no que se refere “aos programas de matemática e suas instruções pedagógicas, houve apenas uma apropriação das inovações que vinham sendo implementadas de forma paulatina, desde 1929, no Colégio Pedro II, tendo como protagonista o professor Euclides Roxo.

Enquanto diretor do Colégio Pedro II, Euclides Roxo havia implementado integralmente, pelo menos na lei, “de cima para baixo” e sem discussões prévias, todas as inovações defendidas por Felix Klein (Soares et al., 2004). Sua posição permitiu influenciar a Reforma Francisco Campos (1931) em relação à disciplina matemática a tal ponto que, nessa reforma, foram adotadas todas as ideias inovadoras defendidas por Euclides Roxo.

No entanto, essa implementação foi, por natureza, contrária à implementação pensada e executada na Alemanha sob a influência do idealizador original, Felix Klein.

...a introdução dessas reformas curriculares “a partir das bases”, atraindo o apoio de professores adequadamente treinados que atuariam como agentes para a implementação das reformas em escolas selecionadas (Schubring, 1999).

Além das muitas críticas e das dificuldades naturais de implementação subjacentes a uma proposta que soava por demais arbitrária e não tinha precedentes, a partir de 1934 novos rumos começaram a se efetivar na educação no Brasil, culminando na Reforma Gustavo Capanema, que foi promulgada 11 anos após a Reforma Francisco Campos. Diante desse quadro, é difícil avaliar os reflexos que as propostas de Euclides Roxo efetivamente tiveram no ensino da matemática no Brasil (Soares et al., 2004). Mas, no que se refere às Transformações Geométricas – das quais as isometrias são um caso particular – elas estiveram sob intenção explícita de Figurar no currículo e de uma forma totalmente diferente do que se entendia ser o ensino de Geometria até então.

O próximo momento com destaques para o ensino das Transformações Geométricas na matemática escolar se deu a partir do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Nesse movimento, no Brasil, o ponto mais agudo relativo às Transformações Geométricas se deu pela tradução *ipsis litteris* da sugestão de Klein admitida para o ensino básico, na qual tais transformações eram apresentadas sob uma abordagem analítica com foco na teoria de conjuntos e com um desenvolvimento predominantemente da matemática do ensino superior. Havia o entendimento de alguns professores de que havia na proposta do MMM uma ênfase na unificação das linguagens utilizadas nos cursos superiores e na escola primária (Burigo, 1985).

E, nesse sentido, o ensino de geometria e, em particular, das Transformações Geométricas se transfigurou em crítico.

O estudo da geometria, via Transformações Geométricas, é uma abordagem que possibilita o tratamento da geometria pelas estruturas algébricas, consideradas pelo MMM como elemento unificador da Matemática. Entretanto, segundo Pavanello (1993) o ensino de geometria sofre um gradual abandono nas últimas décadas no Brasil, apontando como uma das causas o fato de o MMM propor um trabalho com a geometria sob o enfoque das transformações e os professores, por sua vez, que já enfrentavam problemas em relação ao conhecimento na abordagem tradicional, acabaram por ter dificuldades ainda maiores com a proposição de programas nos quais a geometria era desenvolvida sob o enfoque das transformações (Duarte et al., 2006).

Dado o fracasso do MMM, novos paradigmas para o ensino de geometria foram amplamente aclamados por professores e pesquisadores. E, pelo menos três décadas depois, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), vigentes a partir do final dos anos noventa no Brasil, admitiam destaque para o papel das Transformações Geométricas nos processos de ensino e aprendizagem na matemática escolar. Em especial, tomando-se a sugestão de tê-los como conhecimentos que permitem “o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas Figuras sejam congruentes ou semelhantes” (Brasil, 1998).

Nos PCN, a ênfase dada aos conceitos geométricos reafirma que tais conhecimentos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, haja vista a possibilidade de se desenvolver nos alunos um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. Esse posicionamento tinha a Resolução de Problemas como eixo central das orientações curriculares e de ensino de Matemática; e, nesse viés, as Transformações Geométricas figuravam explicitamente no ensino básico em todos os ciclos desde as séries iniciais.

Ribeiro (2016), ao olhar para as influências de Klein no programa Erlanger e analisar os PCN, concluiu que nesse documento as Transformações Geométricas passaram a estar integradas ao ensino de geometria na escola básica desde o primeiro dos quatro ciclos da etapa do Ensino Básico – o que atualmente corresponde de 1º ao 8º ano. Além de também estarem presentes no Ensino Médio.

Nos PCN, a orientação sobre as Transformações Geométricas previa uma introdução experimental e intuitiva, explorando os conceitos de simetria (em particular relacionados à simetria axial). Havia ainda a orientação de que paulatinamente houvesse uma ampliação e aprofundamento nos 3º e 4º ciclos, com a exploração de temas mais complexos, como a percepção de elementos que permanecem invariantes e os que variam quando são utilizadas as Transformações Geométricas. Um ponto que não necessariamente estava sob os argumentos de Klein e apareciam nos PCN é o fato de as construções

geométricas com instrumentos como régua, compasso, transferidor serem sugeridas para verificação das propriedades das duas Figuras envolvidas, ou seja, a original e a transformada.

A partir de 2012, com o Pacto Nacional da Idade Certa (PNAIC), um programa que envolveu quase todo o país, tendo a universidade em parceria com a escola básica, promovendo intensivos cursos de aperfeiçoamento profissional docente, havia para as Transformações Geométricas a orientação do trabalho intuitivo desde o momento de alfabetização matemática, anterior à escrita e leitura. A realização do programa nas escolas, construído com a participação dos professores daquele segmento, foi interrompida em meados de 2015. Mas também significou um marco que colocou as Transformações Geométricas como conteúdo de Geometria, agora em todo o Ensino Básico.

As recentes orientações curriculares para o ensino de Matemática, chamadas de Base Nacional Comum Curricular (BNCC), não necessariamente são um documento de continuidade dos anteriores, apesar de terem interseções com os que as sucederam e de sua autoapresentação como um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais. Mesmo sendo recente e igualmente autoritária como as orientações educacionais anteriores aqui já mencionadas, a BNCC sofre críticas severas ao seu conteúdo e forma, mas traz orientações claras sobre um lugar específico para o conteúdo reconhecido como Transformações Geométricas no ensino de geometria.

É nesse sentido que a BNCC diverge da proposta de Klein, pois o conteúdo que integra os conhecimentos essenciais se esvai da possibilidade de integrar conhecimentos outros em geometria. Ao se revestir dessa essencialidade, se compromete com uma agenda de competências de Educação que, admitidas em outro sentido, até poderiam integrar uma construção dialética de conhecimentos, mas, ao que tudo indica, foram concebidas para sua inserção na escola e sociedade, admitindo exclusivamente o viés da aplicação ao mundo físico e com forte apelo ao mundo do trabalho, como a BNCC diversas vezes ressalta.

Por outro lado, há na BNCC referências a uma integração daquilo que para Klein seriam geometrias diferentes da Geometria Euclidiana, uma vez que admitem, por exemplo, a habilidade EM13MAT509.

(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital (Brasil, 2018).

Especificamente falando das Transformações Geométricas, ao repetirmos o olhar de Ribeiro (2016) agora para a BNCC, vemos que elas figuram nessas orientações desde o letramento matemático e com ênfases que, em princípio, podem ser pensadas como aquelas que deslocam o conhecimento estrito sobre as Transformações Geométricas de volta para o sentido dado originalmente no século passado por

Klein. Isso porque, ao apresentar a unidade temática Geometria para os anos iniciais do ensino fundamental, cita que

É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as Transformações Geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (Brasil, 2018).

A apresentação dessa unidade temática segue explicitando as intenções de aprofundamento para os segmentos seguintes, propondo para o desenvolvimento desses conhecimentos em um cenário de combate às práticas que se restringem ao maciço uso exclusivo de fórmulas e em prol de um desenvolvimento que é novamente conflituoso ao que propõe de Klein, pois explicitamente expõe objetivamente a influência dos contingentes históricos.

Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam “fazer a quadratura de uma Figura”). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau (Brasil, 2018).

Para Klein (2016), embora estejamos inclinados a admitir teoricamente os conteúdos sob a influência de contingentes históricos, isso não garante que o façamos na prática. É importante percebermos que Klein reconhecia que, numa história recente das Geometrias, vários tópicos elementares continuam desprezados em detrimento da “tradição” euclidiana. Essa sutil colocação de Klein propõe uma liberdade de escolha de prática e vínculo ao que de fato são aplicações do conhecimento matemático que exclui as restrições, por exemplo, ao mundo do trabalho.

Para o Ensino Médio, a BNCC ainda prevê sobre os estudantes que

Em relação ao pensamento geométrico, eles desenvolvem habilidades para interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma Figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de Figuras. Além disso, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (Brasil, 2018).

E, especificamente sobre as Transformações Geométricas, se desenvolva a habilidade

(EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir Figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras) (Brasil, 2018).

Esses poucos pontos finais da BNCC, se considerados a partir da trajetória de ensino sugerida nas reformas, movimentos e orientações curriculares no Brasil, especialmente relativamente aos conhecimentos em Geometria – em especial às Transformações Geométricas – ratificam o sentido inicial

de nossa digressão, ou seja, de ainda estarmos desenvolvendo as possibilidades de se ter um ensino de Geometria que leve em consideração as Geometrias unificadas em um grande campo de conhecimento e esteja alicerçado pela construção de conhecimentos próprios da matemática escolar.

Feita nossa breve digressão histórica do ensino das Transformações Geométricas no Brasil, cabe explicitar o que significa para nós a influência de Felix Klein e do Programa Erlanger na presente proposta de oficina.

## **O ENSINO DE ISOMETRIAS NA PERSPECTIVA DO LABEM**

O trabalho referente à atividade de extensão do LabEM pautou-se nas três influências já mencionadas. O contexto da pandemia influenciou a escolha dos recursos, e a influência de Klein considerou a expectativa de ensino de Geometria que nos pareceu evidenciar novos caminhos.

A proposta de Klein (2016) no capítulo dedicado exclusivamente ao ensino de Geometria tinha três bases: os antecedentes históricos; o contraste aos requisitos modernos; e a crítica ao ensino tradicional. Nesses três pontos, Klein resume uma visão pedagógica que questiona uma tradição de ensino que não coloca em discussão vantagens e desvantagens de uma orientação referenciada por marcos históricos exclusivamente referenciados em Euclides, que marginalizam outros tópicos de outras geometrias. Ao falar dos requisitos modernos, Klein discorre sobre a necessidade de o conhecimento matemático ser em si descompartmentado, em especial, com os conhecimentos em geometria e outros campos, mas argumenta num sentido amplo para a matemática.

Ainda, ao reconhecer os fatores que ele chamou de requisitos modernos, Klein discorre brevemente sobre 5 pontos: aspectos psicológicos do aprendizado; uma adequação e coerência de escolha de tópicos de ensino; uma adequação aos objetivos de ensino em respeito às orientações culturais que se desvinculem do puro utilitarismo e correspondam a um desenvolvimento amplo moral e cultural; o protagonismo do professor do ensino fundamental na escolha dos tópicos e suas abrangências, dada a possibilidade de ser este o único profissional especializado para isso; e, por fim, o rompimento dos processos de ensino que negligenciam a intuição espacial tridimensional.

Para o terceiro ponto, Klein discorreu mais elencando vários pontos em que sua proposta poderia suscitar novas formas de se compreender o ensino de geometria na escola e termina sua argumentação com pontos que chamou de lóstimas, visto refletirem um desenvolvimento na matemática escolar que não tem qualquer valor no ensino superior. Vários argumentos de Klein correspondem a práticas atuais, outros ainda são dignos de discussão. Mas não estão diretamente ligados às questões de ensino e aprendizado das transformações que aqui queremos mostrar num cenário mais amplo.

Nosso entendimento de uma influência de Klein e de seu programa Erlanger se dá em resumo na crença de que, com a busca por novos entendimentos sobre as geometrias e o ensino de geometria na matemática escolar, é possível encontrar um lugar para as Transformações Geométricas que são isometrias, tal que esta posição

1. permita aos estudantes uma aquisição intelectual ampla que os faça capazes de participar do trabalho na atualidade, mas que seja substancialmente possível de ser orientado para as diversas geometrias e suas aplicações;
2. possibilite aos professores serem críticos dos modelos de ensino de geometria entendendo a pluralidade das geometrias e as possibilidades de sua unificação, mantendo o professor do Ensino Básico com as rédeas dos processos e dos tópicos a serem escolhidos como peças fundamentais dos conhecimentos dos alunos desse segmento;
3. permita a professores e alunos extrapolar os limites da Geometria Euclidiana considerando uma seleção de conteúdos que deem conta de todo o campo das geometrias, rompendo com a exclusividade de seleção e quase exclusividade da Geometria Plana e Euclidiana, em decorrência de uma tradição escolar pautada apenas em um vínculo histórico.

A delimitação dessa influência incidiu parcialmente também nas escolhas dos recursos didáticos que foram escolhidos para compor a sequência didática trabalhada na oficina. Sobre esse ponto, passamos a discorrer no tópico seguinte.

## RECURSOS DIDÁTICOS

Para enfrentar o desafio do isolamento social decorrente da covid-19, os professores da escola de campo também tiveram de se adequar a tal cenário e considerar uma abordagem de ensino remoto. Adotaram um modelo de ensino composto de atividades síncronas *on-line* e assíncronas, realizadas por meio de plataformas digitais ou AVEA – Ambientes Virtuais de Ensino e Aprendizagem, de tal modo que esta integrasse o uso de recursos didáticos que incentivassem a descoberta, a experimentação e a visualização dos conceitos matemáticos, utilizando tecnologias digitais, jogos digitais, materiais reutilizáveis, videoaulas e *podcasts*, reafirmando o cenário indicado por Flores et al. (2021).

Nossa proposta de sequência didática para essa escola-campo se deu considerando a necessidade de encontrar soluções didáticas que possibilitassem um ambiente de aprendizagem dos conteúdos matemáticos rico e eficaz, atendendo à excepcionalidade do contexto de ensino remoto (Flores et al., 2021, Hodges et al., 2020) e assumindo que o uso de sequências didáticas de tarefas exploratórias que integrem recursos didáticos manipuláveis e/ou tecnologias digitais, quando consideradas a exploração e as conexões entre as diferentes representações dos conceitos matemáticos, quando bem planejado e

executado, favorece a participação ativa dos alunos nas aulas de matemática e uma aprendizagem mais efetiva dos conceitos matemáticos (Fonseca, 2019).

No que se refere especialmente às Transformações Geométricas, o uso de dobraduras tem sido objeto de práticas do LabEM que já incidem nas disciplinas de Ensino de Matemática do curso ao qual o laboratório está vinculado. As dobraduras constituem um recurso didático manipulável que possibilita o estímulo, a autonomia e a participação ativa dos alunos, possibilitando-lhes o desenvolvimento dos seus raciocínios geométricos na aprendizagem dos conteúdos de Geometria (Lopes et al., 2015). Esse recurso também é referenciado em diversas outras pesquisas e nas orientações curriculares para o ensino de matemática (Brasil, 2018; NCTM, 2000). Sendo assim, optamos pelo uso de dobraduras conhecidas como Origami, que frequentemente são adotadas no ensino de Geometria e constituem-se em um instrumento que possibilita a exploração simultânea de aspectos bidimensionais e tridimensionais dos conceitos matemáticos, em particular simetria axial (Murari, 2011).

Para apoiar o uso das dobraduras, recorreremos ao uso do software de Geometria dinâmica Geogebra. Esse *software* de aquisição e uso gratuito, por meio de *download* na *internet*, tem ganhado cada vez mais relevância nas investigações em Educação Matemática, por permitir a criação de aplicativos dinâmicos e interativos (*applets*), contendo construções geométricas planas e espaciais, possibilitando a *visualização* dos conceitos matemáticos, a *conexão entre as suas diferentes representações* e a promoção dos *processos de raciocínio matemático*, aspetos que são considerados importantes no ensino de simetria axial (Fonseca & Henriques, 2021). O Geogebra foi usado para criar situações de simetria que seriam incentivadas pelas dobraduras. Também utilizamos vídeos do Youtube a fim de instruir a construção das dobraduras selecionadas.

## **OFICINA APRENDENDO GEOMETRIA COM AS MÃOS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA**

Tomou-se como objetivo da oficina a ação de experimentar para reconhecer isometrias no plano por meio de uma sequência didática preestabelecida. E, para tanto, intencionamos promover uma ação analítica que fosse descontraída e lúdica, ou seja, que pudesse ser estímulo por meio de uma ação com dobraduras, mas carregada de elementos importantes sobre simetrias.

O caráter lúdico foi estabelecido no sentido de Piaget, ou seja, com a intenção de que cada aluno estivesse implicitamente realizando desejos próprios ao mesmo tempo em que estivesse realizando uma exploração de ideias no momento da ação. Mas também no sentido de Vygotsky (1987, 1991) *apud* Pimentel (2008).

As funções psicológicas superiores instrumentalizam novas modalidades de pensamento, implicando mecanismos capazes de hierarquizar simbolicamente os conceitos, relacionando-os uns aos outros numa rede de generalizações, e de operar com instrumentos mediadores

descontextualizados, isto é, independentes dos contextos concretos em que foram originados (Pimentel, 2008).

**Quadro 1.** Sistematização dos objetivos da sequência didática.

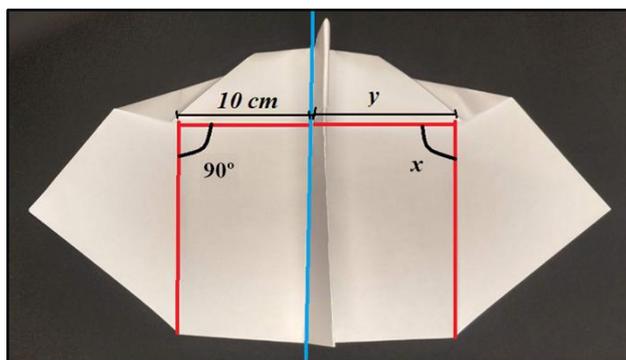
Tarefa	Objetivos	Ações
<p><b>Tarefa 1:</b> Dobradura do avião</p>	<p>Reconhecer a transformação de simetria no plano</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Construção de origami avião de papel e identificação de elementos geométricos (polígonos, ângulos, etc.) resultantes das dobraduras.</li> <li>· Exploração de <i>applet</i> do GeoGebra que contém uma construção geométrica da planificação do avião para o estudo de simetria axial.</li> </ul>
<p><b>Tarefa 2:</b> Bandeirinha do Mario Bros</p>	<p>Identificar os lados e ângulos simétricos e suas medidas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Construção de bandeirinha do Mario Bros a partir de dobraduras e recortes com uma folha de papel.</li> <li>· Exploração de <i>applet</i> do GeoGebra que contém uma construção geométrica da bandeirinha para o estudo da simetria axial.</li> </ul>
<p><b>Tarefa 3:</b> Máscara logo dos transformers.</p>	<p>Reconhecer e construir Figuras simétricas.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Construção de Figuras simétricas a partir de dobradura e recorte de papel.</li> <li>· Exploração de <i>applet</i> do GeoGebra que contém uma construção geométrica da máscara transformers para o estudo da simetria axial.</li> </ul>
<p><b>Tarefa 4:</b> Simetria no mundo!</p>	<p>Reconhecer simetria axial em outros contextos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>· Realização de pesquisa na internet sobre objetos, imagens e pinturas que contenham simetria axial.</li> </ul>

A sequência didática trabalhada era composta de quatro tarefas e foi construída com o objetivo de promover a compreensão do conceito de simetria axial. Essa sequência foi pensada e estruturada de forma a conduzir os estudantes à experimentação, visualização e descoberta de aspectos relacionados a esse conceito matemático, nomeadamente, eixo de simetria, pontos, segmentos, ângulos, distâncias e polígonos simétricos, entre outros, a partir de construções por meio dobraduras e explorações dinâmicas de *applets* do GeoGebra. A sistematização dos principais objetivos dessas tarefas bem como as respectivas ações realizadas pelos estudantes, visando promover a compreensão da simetria axial, são apresentadas

no quadro 1. As descrições das tarefas da sequência didática estão disponíveis no link <https://drive.google.com/file/d/1xnHBn6-TqMGT7omYYTLWjZpj4-VhqNow/view?usp=sharing>.

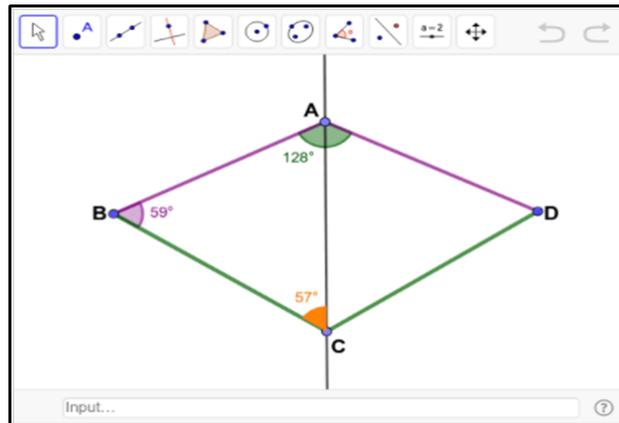
A tarefa 1 tem como foco a exploração das noções intuitivas de simetria axial. Para isso, os estudantes devem construir um avião de papel, seguindo as instruções de passo a passo da dobradura disponível no link <https://youtube.com/shorts/0PHo5wdTobo?feature=share>. Após certificar-se de que todos os alunos já construíram e experimentaram o avião, o professor deve conduzi-los à análise da planificação do avião, identificando pontos, segmentos, retas, ângulos simétricos e a resolução das questões 2) até 5), tal como especificamos na Figura 1.

Em especial as tarefas 1 e 2 consideram que a apropriação de conceitos pelo contato com objetos espaciais pode ser considerada levando em conta que a habilidade de percepção visual e os conceitos de geometria podem ser aprendidos simultaneamente (Hoffer, 1997; Grande, 1994).

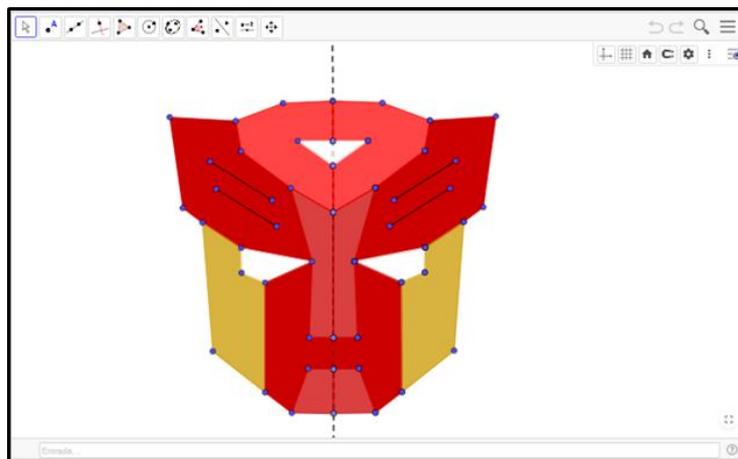


**Figura 1.** Ilustração de planificação do avião utilizado na aplicação da tarefa 1.

Na tarefa 2, os alunos receberão uma folha de papel quadrada e devem recortar um triângulo, a partir de um eixo de simetria (dobra horizontal ou vertical) para a construção de uma bandeirinha do Mario Bros (de formato triangular). Com auxílio de um applet do Geogebra contendo a planificação desta bandeirinha (Figura 2), o professor deve conduzir os alunos à análise das medidas dos elementos simétricos no polígono da bandeirinha. O foco dessa tarefa é refletir sobre algumas propriedades do triângulo e losango, ângulos opostos congruentes, pares de lados. Figura 2: Ilustração de *applet* do Geogebra utilizado na aplicação da tarefa 2, o qual pode ser acessado através do link <https://www.geogebra.org/m/eyadgx5s>.



A tarefa 3 propõe explorar o reconhecimento e a construção de Figuras simétricas. Os alunos devem observar a imagem da logo dos Transformers e identificar o seu eixo de simetria. O professor deve realizar explorações em um *applet* do Geogebra (Figura 3), modificando pontos e segmentos, e questionar os alunos sobre a existência de eixo de simetria na imagem Transformers. Após esse momento, o professor propõe aos alunos que construam uma máscara simétrica a partir de uma folha de papel utilizando dobraduras e recortes (com tesoura) e destaquem pares de elementos simétricos.



**Figura 3.** Ilustração de *applet* do Geogebra utilizado na aplicação da tarefa 3, o qual pode ser acessado através do link <https://www.geogebra.org/m/rvmk3egb>.

Na tarefa 4, os alunos devem realizar uma pesquisa na internet, jornais ou revistas, sobre imagens de objetos, pinturas, etc. que apresentam simetria axial. A realização dessa pesquisa tem como objetivo conduzir os alunos ao reconhecimento de simetria axial em outros contextos.

## PERSPECTIVAS SOBRE A PRÁTICA DIDÁTICA

Esta Oficina é, para nós do LabEM, uma oportunidade de compartilhar uma proposta didática para o ensino de conceitos matemáticos, numa perspectiva que entende uma história de influências e

orientações curriculares e pretende encontrar um espaço de ação que considere as Geometrias no lugar de uma Geometria. Consideradas num cenário em que vários estudos compõem a área de pesquisa que conhecemos como Educação Matemática, torna-se autoexplicativo o fato de as influências de Klein, por nós consideradas, sugerirem atividades que se distinguem em essência das que são vistas na realidade de nosso entorno de pesquisa no LabEM.

Nosso principal destaque e prospecção está em sugerir que professores e futuros professores pensem as simetrias com um papel autônomo ao de outros conteúdos, permitindo acontecer também enlances e suportes intuitivos e formais relativos aos conhecimentos de Geometria Euclidiana Plana que ainda Figura nas escolas que conhecemos. Da mesma forma, consideramos que a proposta apresentada se enquadra nos ambientes de sala de aula presencial e de ensino híbrido sem que isso seja uma forma de contornar as adversidades causadas pela pandemia da covid-19.

Ao envolver nessa proposta o uso de materiais manipulativos concretos, virtuais e recursos tecnológicos de uso livre e gratuito, pensando em alunos em classes presenciais ou remotas, esperamos que esta proposta sirva de incentivo e apoio às práticas docentes dos professores de Matemática, fazendo-os reconhecer o potencial desses recursos didáticos para criar ambientes de ensino promotores de aprendizagens significativas. O modo como esses recursos didáticos interferem no processo de aprendizagem referente às simetrias precisa ser investigado com profundidade a fim de possibilitar reflexões mais robustas sobre essa abordagem inovadora de ensino.

Acreditamos, por fim, que as atividades sugeridas podem contribuir para a formação dos alunos, uma vez que uma visão inovadora que contempla os conhecimentos em geometria com uma perspectiva ampliada permite construir resultados novos e profícuos. Essas possibilidades estão ancoradas pelas oportunidades de se construir em conjunto práticas docentes diferenciadas com os futuros professores de matemática.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- Brasil (1997). Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF.
- Brasil (1998). Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. Brasília, MEC/SEF.
- Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília.
- Burigo, E. Z. (1985) Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento e do pensamento de educadores nos anos 60. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação-

Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/163050> Acesso em 17 mar. 2022.

- Duarte, A. R. S. et al. (2006). Abaixo Euclides e acima quem? Uma análise do ensino de geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. *Práxis Educativa (Brasil)*, 1(1), 87-93. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=89410109>
- Engelbretch, J.; Llinares, S.; Borba, M. C. (2020) Transformation of the mathematics classroom with the internet. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 52, 825-841. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01176-4>.
- Fernandes, N. C. (1984) O programa de Erlangen de Felix Klein (considerações comparativas sobre as pesquisas geométricas modernas). Tradução de Normando Celso Fernandes. São Paulo: Instituto de Física da USP. Disponível em: <http://publica-sbi.if.usp.br/PDFs/pd499> Acesso em 17 mar. 2022.
- Flores, M. et al. (2021) Ensinar em tempos de COVID-19: Um estudo com professores dos ensinos básico e secundário em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação*, 1(34), 5-27.
- Fonseca, V. (2019). Aprendizagem com compreensão dos conceitos de limite e continuidade: uma experiência de ensino com recurso ao GeoGebra na formação inicial de professores de matemática, no Brasil. 414f. Tese (Doutoramento em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.
- Fonseca, V.; Henriques, A. (2021) Pre-service mathematics teachers using Geogebra to learn about instantaneous rate of change. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, London, 1, 1-23. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1958942>.
- Hodges, C.; Moore, S.; Lockee, B.; Trust, T.; & Bond, A. (2020). The Difference between Emergency Remote Teaching and Online Learning. *EDUCAUSE Review*. Disponível em <https://er.educause.edu/articles/2020/3/the-difference-between-emergency-remote-teaching-and-online-learning>. Acessado em 22/05/2022
- Judd, J.; Rember, B. A.; Pellegrini, T.; Ludlow, B.; & Meisner, J. (2020) This is Not Teaching?: The Effects of COVID-19 on Teachers. Disponível em: [https://www.socialpublishersfoundation.org/knowledge\\_base/this-is-not-teaching-the-effects-of-covid-19-on-teachers/](https://www.socialpublishersfoundation.org/knowledge_base/this-is-not-teaching-the-effects-of-covid-19-on-teachers/). Acesso em 17 de dez. 2021.
- Klein, F. (2016) *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint. Volume II: Geometry Translated by Gert Schubring*. Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg, e-book.
- Lopes, L. S.; Alves, G.; Ferreira, A. L. (2015) A Simetria nas Aulas de Matemática: uma proposta investigativa. *Educação e Realidade*, Porto Alegre, 40(2), 549-572. <http://dx.doi.org/10.1590/2175-623646015>.

- Murari, C. (2011) Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática. *Bolema*, Rio Claro, 25(41), 187-211.
- National Council of Teachers of Mathematics - NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Va.: NCTM.
- Pavanello, R. (1989) O Abandono do Ensino de Geometria: Uma Visão Histórica. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas- UNICAMP: Faculdade de Educação. São Paulo.
- Pimentel, A. (2008) A ludicidade na educação infantil: uma abordagem histórico-cultural. *Psicologia da educação*, 26, 109-133.
- Ribeiro, M. A. da S. (2016) Transformações Geométricas Planas: um estudo experimental e dinâmico. Dissertação de Mestrado/ IME-USP, 233 p.
- Rodrigues, C. K. et al. (2021) Metodologias da Educação Matemática para o ensino remoto: uma revisão sistemática da literatura. *Educação Matemática em Pesquisa: Perspectivas e Tendências*. Vol. 3. editora Científica digital. Disponível em: <<https://downloads.editoracientifica.org/articles/210404429.pdf>> Acesso em 12 de dez. 2021.
- Schubring, G. (1999) O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos. *Zetetiké*, Campinas: Cempem, 7(11), 29-49. Disponível em: <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646833/13734>> Acesso em 17 de dez. 2021.
- Silva, A. V. de M. et al. (2021) Ensinando Matemática em tempos de pandemia. *Revista Educação Pública*, 21(16). Disponível em: <<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/21/16/ensinando-matematica-em-tempos-de-pandemia>> Acesso em 7 de nov. 2021.
- Soares, F. dos S. et al. (2004) Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. *Revista Horizontes*, Bragança Paulista, 22(1), 7-15. <[https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/1112/HORIZONTES\\_2004\\_SOARES\\_DASSE\\_ROCHA.pdf;jsessionid=C5E43F22812CBEE6556A48F6F53EA268?sequence=1](https://app.uff.br/riuff/bitstream/handle/1/1112/HORIZONTES_2004_SOARES_DASSE_ROCHA.pdf;jsessionid=C5E43F22812CBEE6556A48F6F53EA268?sequence=1)> Acesso em 7 de nov. 2021.
- Yang, Y.; Vygotsky, L. S. (1987). Thinking and speech. In: Rieber, R. W. & Carton, A. S. (eds.). *The collected works of L. S. Vygotsky*, New York, Plenum Press, pp. 37-285.
- Vygotsky, L. S. (1991). *Obras Escogidas*. Madrid: Visor. Tomo II [Conferencias sobre psicologia].
- Zhang, W.; Wang, L.; & Wang, C. (2020). Suspending Classes Without Stopping Learning: China's Education Emergency Management Policy in the COVID-19 Outbreak. *Journal of Risk and Financial Management*, 13(3), 55. <https://doi.org/10.3390/jrfm13030055>.



## Índice Remissivo

### A

avaliações, 9, 40, 41, 42

### C

Colégio de Aplicação, 7, 8, 9, 28, 32, 35, 43

Colégio de Aplicação da UFRJ, 32, 43

### D

dobraduras, 6, 8, 11, 20, 21, 23

### E

ensino remoto emergencial, 28, 29, 31, 32, 36, 40, 42

### G

Geogebra, 20, 22, 23, 25

geometrias não euclidianas, 9, 44, 47, 54, 55

### I

interdisciplinaridade, 34, 39, 60

### L

lógicas do conhecimento, 47

### P

pandemia, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 18, 24, 26, 28, 29, 36, 40, 42, 44, 45, 54

pensamento científico, 4, 9, 44, 45, 47, 54, 55, 61

### R

representação matemática, 55

### S

simetria axial, 8, 13, 15, 20, 21, 22, 23

## Autores



  **Ana Maria Martensen Roland Kaleff**

Professora titular aposentada da Universidade Federal Fluminense (UFF). Doutora em Educação e Mestre em Matemática pela UFF. Licenciada em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Campinas. Foi fundadora e coordenadora do Laboratório de Ensino de Geometria (LEG/UFF) e do Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio (UFF). Foi coordenadora de disciplinas do Curso de Especialização a Distância Novas Tecnologias em Ensino de Matemática (NTEM/UFF) da Universidade Aberta do Brasil e professora do Curso de Mestrado Profissional em Diversidade e Inclusão do Instituto de Biologia (UFF).



  **Darling Domingos Arquieres**

Professora da Rede Estadual de Educação - SEEDUC RJ, regente em matemática desde de 2005. Mestre em Educação em Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - PPGEduCIMAT pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2019). Especialista em Educação Matemática pela PUC-RJ (2002), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino de Matemática pela Universidade Federal Fluminense - UFF (2014). Graduado com bacharelado e bacharelado em Matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ (2001). Colaboradora do Projeto Laboratório de Matemática Sustentável, onde estudou o papel do uso de objetos específicos de aprendizagem na melhoria do ensino de Matemática (2015). Desde 2005 sou professor da rede estadual do RJ. De 2018 a 2021 atuei como professora convidada na Pós-Graduação Lato Sensu em Educação

Matemática e suas Aplicações no Ensino da Universidade Castelo Branco.



 **Daniela Mendes Vieira da Silva**

Doutora pelo programa de pós graduação em Ensino de Matemática da UFRJ (PEMAT-UFRJ), mestra pelo programa de pós graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFRRJ (PPGEDUCIMAT\_UFRRJ), graduada em Matemática-Licenciatura Plena pelo CEDERJ/UFF. Possui também atualização em Mídias na Educação pela UFRJ e especialização em Educação Tecnológica pelo CEFET-RJ. Sou professora adjunta na Faculdade de Formação de Professores da UERJ, onde atuo nas licenciaturas em Matemática e Pedagogia e no Programa de Pós Graduação em Matemática (PROFMAT). Sou também pesquisadora associada no grupo de pesquisa do Instituto de Matemática da UFRJ: TIME (Tecnologias, Inclusão, Matemática e Ensino).



  **Ion Moutinho Gonçalves**

Matemático, bacharelado em Matemática (1989) na Universidade Federal Fluminense (UFF). Mestre (1991) em Matemática pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Doutor (2006) em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR). Pós – Doutorado (2018) em Educação Matemática desenvolvido na Simon Fraser University (SFU). Realizou pesquisas na área de Geometria Diferencial e, atualmente, faz pesquisas a respeito do conhecimento especializado do professor de Matemática. Tem grande interesse no desenvolvimento de estratégias e materiais didáticos que possam ser utilizados por professores que ensinam

Matemática. Contato: 21 - 99442 4403, e-mail: [ion.moutinho@gmail.com](mailto:ion.moutinho@gmail.com)



  **Fernando Celso Villar Marinho**

Professor Titular da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), coordenador do projeto de Desenvolvimento de Jogos Digitais na Educação, licenciado em Matemática (2000) na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre (2005) em Ciências pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Doutor (2014) em Educação em Ciências e Saúde pelo Instituto Nutes de Educação em Ciências e Saúde (NUTES) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Premiado no concurso Inovapps 2015 com o jogo Primogo, autor das séries de TV Os Exploradores de Kuont, Matemática em Toda Parte 2. Desenvolveu e coordenou projetos junto ao Ministério da Educação (MEC), SEEDUC/RJ, CESGRANRIO, FIRJAN e TV

ESCOLA, produzindo materiais digitais e recursos tecnológicos. Avaliador no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e no Banco Nacional de Itens do INEP. Entusiasta do uso de tecnologias na educação e 'aprendedor' apaixonado pelo conhecimento, está sempre em busca de soluções criativas e de impacto para muitas pessoas. Contato: [@professorfernandovillar](mailto:@professorfernandovillar), e-mail: [fernandovillar@ufrj.br](mailto:fernandovillar@ufrj.br)

## Organizadores



  **André Luiz Souza Silva**

Licenciado em Matemática (2004) e Especialista em Ensino de Matemática (2008) pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (2010) pelo Centro Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Estado do Rio de Janeiro (CEFET-RJ), Especialista em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática (2010) pela Universidade Federal Fluminense (UFF). e-mail: andre.luiz@ifrj.edu.br.



  **José Carlos Gonçalves Gaspar**

Mestre em Ensino de Ciências na Educação Básica pela Universidade do Grande Rio (Unigranrio), Especialista e Licenciado em Matemática pela UFF. Professor de Matemática na Educação Básica e Superior do IFRJ e da rede Municipal de Duque de Caxias. Membro do Projeto ConSeguir e um dos redatores da reestruturação curricular da rede municipal de Duque de Caxias (2019-2022). Autor de Materiais Didáticos pela Somos Educação e Editora Poliedro. Possui experiência em avaliação em larga escala e com Educação a Distância. Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). Contato:(21) 99881-2933, e-mail:jose.gaspar@ifrj.edu.br.



  **Vilmar Gomes da Fonseca**

Licenciado em Matemática e Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, Doutor em Educação na especialidade de Didática da Matemática pela Universidade de Lisboa. Professor do IFRJ-campus Nilópolis. Tem experiência em pesquisa e extensão na área de Matemática atuando principalmente nos campos: ensino e aprendizagem da Matemática, formação de professores, tecnologias educacionais e avaliação educacional. É coordenador de área do núcleo do PIBID da Licenciatura em Matemática do IFRJ-campus Nilópolis (2020 - 2022). Membro atuante do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ). e-mail: vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

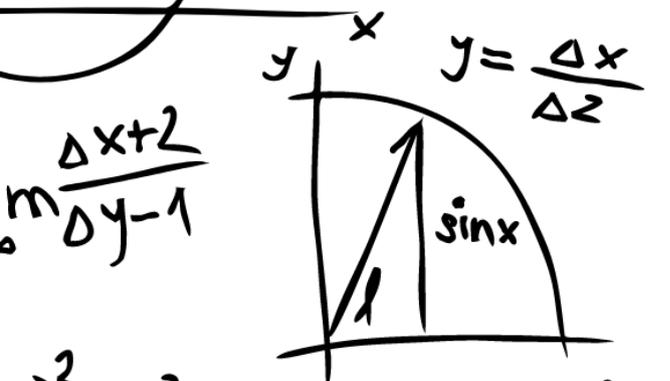


  **Marcelo Silva Bastos**

Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ. Mestre em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Especialista em “Ensino de Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Ensino Médio” pela UFF. Licenciado em Matemática pela UFRRJ. Docente do IFRJ-Campus Nilópolis atuando no Ensino Médio Técnico e no Curso de Licenciatura em Matemática. Coordenador do Laboratório de Ensino de Matemática (LabEM-IFRJ)

$$\frac{\sum = n-1}{(x-m)^2} \quad \frac{A-C}{C} =$$

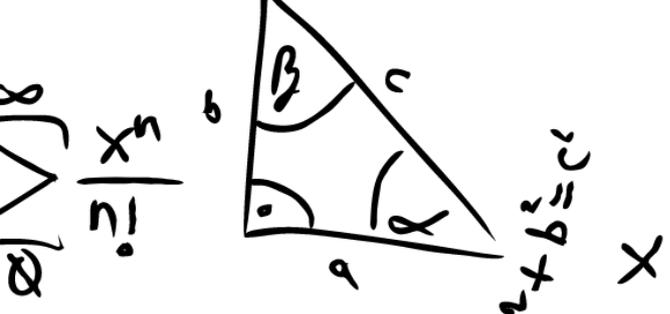
$$S = \int_{t=2}^{10} 5t dt$$



$$a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 \quad f_x =$$

$$x_{1/2} = \frac{b \pm (a-c)}{\sqrt{2a}}$$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\text{ctg} x - 2}{2\sqrt{1-x^3}}$$

$$S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi \approx 3,1415$$

$$P = r^2 \pi$$



**Pantanal Editora**  
 Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000  
 Nova Xavantina – Mato Grosso – Brasil  
 Telefone (66) 99682-4165 (Whatsapp)  
<https://www.editorapantanal.com.br>  
[contato@editorapantanal.com.br](mailto:contato@editorapantanal.com.br)