Caminhos da Matemática

História, Educação e Aplicações

Bruno Rodrigues de Oliveira
Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera
(Organizadores)

Pantanal Editora

2019

Bruno Rodrigues de Oliveira
Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera
(Organizadores)

Caminhos da Matemática

História, Educação e Aplicações

Pantanal Editora

2019

Copyright© Pantanal Editora
Copyright do Texto© 2019 Os Autores
Copyright da Edição© 2019 Pantanal Editora
Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo
Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera
Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: Os editores
Edição de Arte: Os editores e autores
Revisão: Os Autores

Conselho Editorial
- Profª. Drª. Albys Ferrer Dubois – UO
- Prof. Dr. Caio Cesar Enside de Abreu – UNEMAT
- Prof. Msc. David Chacon Alvarez – UNICENTRO
- Prof. Dr. Fábio Steiner - UEMS
- Prof. Msc. Javier Revilla Armesto – UCG
- Prof. Dr. Julio Cezar Uzinski – UFMT
- Prof. Msc. Lucas Rodrigues Oliveira – Municipio de Chapadão do Sul
- Prof. Dr. Rafael Felippe Ratke – UFMS
- Prof. Dr. Wéverson Lima Fonseca – UFC
- Profª. Drª. Yilan Fung Boix – UO

Conselho Técnico Científico
- Esp. Joacir Mário Zuffo Júnior - UNEMAT
- Esp. Maurício Amormino Júnior - UFMG

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)

C183 Caminhos da matemática [recurso eletrônico] : história, educação e aplicações / Organizadores Bruno Rodrigues de Oliveira, Alan Mario Zuffo, Jorge González Aguilera. – Nova Xavantina, MT: Pantanal Editora, 2019.
138 p. : il.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
ISBN 978-65-81460-02-0

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática – Formação. I. Oliveira, Bruno Rodrigues de. II. Zuffo, Alan Mario. III. Aguilera, Jorge González.

CDD 510.07

Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422

O conteúdo dos livros e capítulos, seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. O download da obra é permitido e o compartilhamento desde que sejam citadas as referências dos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000. Nova Xavantina – Mato Grosso - Brasil
Telefone (66)99682-4165 (Whatsapp)
https://www. editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br

Apresentação

As principais vertentes no estudo das ciências da matemática são: história da matemática, aspectos relativos ao ensino e aprendizagem da disciplina, o estudo da matemática por si mesma, denominada de matemática pura e também as aplicações das teorias matemáticas.

Neste livro são apresentadas discussões sobres questões relativas a história da matemática, a educação e aplicações.

No primeiro tópico, os autores elaboram um texto que resgata a história do primeiro matemático brasileiro a obter o doutoramento, destacando suas principais contribuições.

No segundo tópico, é apresentada uma pesquisa sobre o ensino/aprendizagem da disciplina de matemática financeira no nível superior, empregando a metodologia de ensino e avaliação *Team Based Learning*.

Mesclando os tópicos de aplicação e educação, temos um trabalho sobre as funções e equações exponenciais e logarítmicas, tratando um pouco sobre seu desenvolvimento e importância históricos e sua utilização até os dias atuais.

Por último, relativo ao tópico de aplicação, duas pesquisas ilustram diferentes teorias matemáticas, concernentes a análise de dados e equações diferenciais, exibindo suas aplicações na análise de sinais de voz e estudo de circuitos elétricos, respectivamente.

Assim sendo, este livro trilha apenas uns pouquíssimos caminhos construídos pela matemática. Pretendemos que esta obra seja ampliada para que esta disciplina tão essencial para o desenvolvimento da ciência possa ser melhor compreendida em suas mais diferentes abordagens.

Bruno Rodrigues de Oliveira
Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera

SUMÁRIO

Capítulo 1.....5
Joaquim Gomes De Souza (1829-1864): A Construção de uma Imagem de Souzinha

Capítulo 2.....37
Aplicações de funções e equações exponenciais e logarítmicas

Capítulo 3.....51
Ensino de matemática financeira no curso de licenciatura em matemática e bacharelado em ciências contábeis: reflexões dos impactos no processo de ensino/aprendizagem e/ou no mercado de trabalho

Capítulo 4.....61
Extração de Características em Sinais de Voz por meio da Análise de Componentes Independentes

Capítulo 5.....76
Equações Diferenciais Ordinárias na Aplicação de Circuitos Elétricos

Capítulo 1

Joaquim Gomes De Souza (1829-1864): A Construção de uma Imagem de Souzinha

Irene Coelho de Araújo[1*]
Eder Pereira Neves[1]

INTRODUÇÃO

Este texto apresenta uma investigação sobre a vida e as obras de Joaquim Gomes de Souza com vistas à construção de uma imagem desse personagem – mais conhecido na História da Matemática brasileira como Souzinha (1829-1864). Para tanto, debatemos algumas das ações que levam uma pessoa a se tornar importante para a História, como são registrados os acontecimentos que a fizeram se tornar nome de rua, nome de escolas, praças, razões do por que alguém escreveu livros sobre a pessoa, realizou homenagens públicas e construiu monumentos dela.

Adotamos como suporte teórico e metodológico elementos da Análise de Discurso Francesa (ADF), buscando tanto aproximar das concepções de Foucault e Bakthin, quanto relacionar História e Linguística, fugindo da percepção da transparência da linguagem e da ilusão do entendimento das variadas formas de expressões possíveis por meio dos códigos linguísticos.

Em busca de formas de lidar com as noções discursivas, sua significação, seu sentido e seu uso na História, tomamos a decisão de estudar pontos de vista de historiadores, filósofos e linguistas com vistas a auxiliar na efetivação do trabalho. A conclusão a que chegamos é de que uma imagem de Souzinha não se resume ao que ele de fato produziu em termos de obras fantásticas ou perfeitas. Os fatos, as tradições, crenças, prestígio familiar, os valores presentes no século XIX, a forma de escrita das biografias foram fatores que permitiram a sua inserção na história.

Este estudo teve como finalidade discorrer sobre os diversos fatos que envolvem a construção de uma imagem biográfica apresentada em textos escritos sobre um personagem da

[1] Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Unidade Universitária de Cassilândia. Rodovia MS 306, Cassilândia-MS.
* Autor de correspondência: irene@uems.br

História da Matemática. A partir dos fatos, procuramos compreender o que influenciou os autores dos textos nos seus escritos e lançar luz ao processo de construção de uma imagem de Joaquim Gomes de Souza – Souzinha (1829-1864).

Esse personagem, o primeiro matemático brasileiro a conseguir o grau de doutor em Matemática com defesa pública de tese, deixou textos escritos relacionados à Matemática, Física e Poesias, foi parlamentar na província do Maranhão e médico. Sobre ele foram escritos vários textos, e o presente trabalho traz uma compilação e um debate sobre as informações e os juízos contidos em alguns escritos.

Para escolher os textos seguimos uma tradição, qual seja, a de analisar os que mais apareceram como referência nas pesquisas sobre o assunto selecionadas para este trabalho cujo detalhamento descrevemos adiante.

Os textos encontrados em nossa busca foram publicados em datas referentes a três séculos diferentes. Esse fato teve que ser levado em conta em nossas análises, pois consideramos que essa diferença de datas pode ter influenciado as escritas dos autores. Por isso, a análise de como cada pesquisador, em momentos e influências diferentes, contou a história de Joaquim Gomes de Souza se tornou fundamental.

No texto publicado no *Diccionario Bibliographico Portuguez* de autoria de Innocencio Francisco da Silva (1884), encontramos a autobiografia de Souzinha. Nesse documento, foi possível o estudo de suas memórias escritas e o conhecimento dos conceitos matemáticos apresentados. Em seguida são apresentados os títulos das memórias constantes da autobiografia e um detalhamento daquela que trata dos métodos gerais de integração.

Os dados sobre a vida e as obras matemáticas de um professor da Escola militar do Rio de Janeiro que nasceu e estudou no Brasil, defendeu uma tese de doutorado considerada inédita e que viveu no período de construção de alguns conceitos da Matemática do século XIX, permitiram observar como era a Matemática que ele estava investigando e relatar pesquisas que indicam se de fato houve contribuição da obra de Souzinha para as descobertas da época.

A construção de uma imagem de Joaquim Gomes de Souza e um levantamento dos conceitos matemáticos pesquisados por ele e registrados em suas publicações podem contribuir com as pesquisas em História da Matemática e, também, com a formação de professores de Matemática. Entendemos que a contribuição seja a de informar a participação de um matemático brasileiro na construção de conceitos matemáticos.

Os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa são aqueles adequados a uma abordagem qualitativa de uma pesquisa bibliográfica e documental. Adotamos elementos da Análise de Discurso Francesa (ADF) como aporte teórico e metodológico, buscando tanto

aproximar das concepções de Foucault e Bakthin, quanto relacionar História e Linguística. Para nós esses referenciais teóricos e metodológicos possibilitam entender as diversas formas do uso da linguagem para investigar os fatos históricos que envolvem a história de Souzinha.

O texto que resulta deste estudo foi organizado da seguinte forma:

Apresentamos dados biográficos de Joaquim Gomes de Souza e, de maneira sucinta, alguns ideais presentes no século XIX que podem ter influenciado a forma de escrita sobre a história de Souzinha. Expomos, nessa parte, a opinião do primeiro crítico e do primeiro grande admirador que aparecem na história de Souzinha, bem como os argumentos que eles apresentam para sustentar suas ideias.

Foram feitas considerações sobre a diferenciação dos discursos na História e na Linguística. Expusemos também as visões de Foucault e Bakthin sobre elementos que compõem a ADF e suas relações com a construção da imagem de uma pessoa.

Apresentamos, as obras escritas por Joaquim Gomes de Souza, o que o influenciou para escrevê-las, os meios que utilizou para publicação dessas obras, as justificativas usadas, alguns conceitos matemáticos apresentados por ele nessas obras e sua forma de organização e escrita.

Destacamos que, o personagem pesquisado recebe algumas denominações: a denominação de Joaquim Gomes de Souza, seu nome de registro; Gomes de Souza como é indicado em algumas publicações e, também Souzinha, codinome que recebeu quando ainda era criança e que aparece em algumas publicações.

ELEMENTOS BIOGRÁFICOS DE JOAQUIM GOMES DE SOUZA – SOUZINHA

A análise de uma imagem biográfica de Joaquim Gomes de Souza foi feita observando vários aspectos de sua trajetória; depoimentos sobre sua personalidade que constam em vários livros de diversas épocas, bem como concepções sobre fatos de sua carreira e, também, opiniões críticas sobre seus procedimentos (Figura 1).

Ao observar a construção de um texto, devemos levar em conta a atuação eficaz de caráter linguístico e social que demanda a participação de sujeitos inseridos num determinado contexto sociocultural, envolvidos no processo de organização dos discursos.

Figura 1. Retrato de Joaquim Gomes de Souza.
Fonte: http://www.google.com.br/search/joaquimgomesdesouza

Ao observar a construção de um texto, devemos levar em conta a atuação eficaz de caráter linguístico e social que demanda a participação de sujeitos inseridos num determinado contexto sociocultural, envolvidos no processo de organização dos discursos.

De acordo com Viveiros (1954), o Maranhão despontava na política e na economia, foi natural a necessidade de os filhos dos senhores ricos buscarem o melhoramento intelectual, muitos maranhenses foram estudar na Europa. Com isso, o Maranhão se tornou um local com grande representação intelectual e cultural, grandes nomes de destaque constituíram o chamado Grupo Maranhense (1832 – 1868), por isso recebeu a rotulação de "Atenas do Brasil".

Joaquim Gomes de Souza nasceu em 15 de fevereiro de 1829, na vila de Itapecuru Mirim, na província do Maranhão, e faleceu em Londres no dia 1º de junho de 1864. Foi o sétimo filho de uma família de nove irmãos, recebeu o apelido de Souzinha, quando ainda era criança.

Iniciou seus estudos em São Luís, com 12 anos de idade foi enviado para Olinda, com o intuito de estudar Direito, porque o seu irmão mais velho já estudava lá e pelo fato de que, naquela época, a cidade de Olinda atraía muitos estudantes de todo o Brasil, por conta da existência do Seminário Católico e da Faculdade de Ciências Jurídicas e Sociais.

Um ano depois Souzinha retornou para São Luís, pois seu irmão havia falecido, ele ficaria em Olinda sozinho e seu pai decidiu enviá-lo em 1843, com apenas 14 anos, para a Escola Militar do Rio de Janeiro a fim de seguir a carreira militar. Ficou registrado na história de Souzinha que foi na Escola Militar que ele se destacou, apresentando muito domínio das Matemáticas.

Em virtude de ser muito franzino, as práticas militares não atraíam Souzinha, que se interessava mais pela Matemática e, em 1845, reconheceu não ter condições físicas para

continuar na Escola Militar e resolveu dar baixa do exército, no mesmo ano fez o exame de Latim e Filosofia para ingressar no curso de Medicina da Faculdade do Rio de Janeiro, com 16 anos de idade.

Ao cursar o primeiro ano de Medicina, encontrou na Física e na Química uma grande motivação para suas pesquisas; com isso, começou a estudar sozinho o Cálculo Diferencial e Integral, Mecânica e Astronomia.

Em 1848, depois de ter certeza de que queria enveredar pela Matemática, abandonou o curso de Medicina. Conseguiu autorização para fazer exames, na tentativa de concluir o curso de Ciências Matemáticas e Físicas; depois de fazer várias avaliações diante da comissão de professores avaliadores, conseguiu comprovar seus conhecimentos na congregação da Escola Militar e essa lhe concedeu o grau de bacharel em Ciências Matemáticas e Físicas.

A partir do título de bacharel, solicitou à Congregação da Escola o direito de defender em público sua tese, a fim de obter o grau de doutor, sua solicitação foi aceita. Com 19 anos defendeu uma tese inédita em Astronomia, com 55 páginas, tendo como fundamento básico as teorias de Laplace, contidas na sua obra Mecânica Celeste.

Depois de obter o grau de doutor, considerado como o primeiro matemático brasileiro a ter o grau de doutor com defesa pública de tese em universidade brasileira, tornou-se professor da Escola Militar.

No mesmo ano da defesa da tese, surgiu uma vaga de lente substituto[1] na Escola Militar. Ele fez a seleção, foi aprovado, contratado e se tornou professor da Escola Militar, ou seja, foi professor substituto da 1ª cadeira do 4º ano, que compreendia as disciplinas de Trigonometria Esférica, Astronomia e Geodésia. Como exigência da função, teve de ser nomeado tenente-coronel do exército e capitão honorário da Escola Militar.

A primeira biografia de Joaquim Gomes de Souza, escrita por Antônio Henriques Leal (1828-1885) no livro Pantheon Maranhense: Ensaios Biográficos dos Maranhenses ilustres já falecidos (1874), é uma referência carregada de ufanismos, demonstrando do início ao fim uma admiração peculiar, capaz de confundir o leitor com as informações, dando a impressão de que toda aquela história faz parte de uma irrealidade.

Nessa mesma biografia, Leal afirma que D. Pedro II era admirador de Souzinha e o designou, em 1852, especialista em Ciências Sociais, para que ele passasse a se dedicar à pesquisa das reformas necessárias ao sistema penitenciário do país; logo depois, foi nomeado secretário da comissão diretora da construção e do regime interno da casa de correção da Corte; nesse cargo ele permaneceu até a sua a morte.

[1] s2g. Obsol. Professor substituto de escola superior. (Dicionário Aurélio, 2000, p. 423).

Segundo Portela (1975), com a justificativa de estudar o sistema penitenciário europeu, argumentando sobre a necessidade de reformar o nosso sistema, requereu ao governo brasileiro permissão para ir à Europa, mais precisamente para França, Inglaterra e Alemanha. Em 1854, viajou para a França, enquanto esteve lá aproveitou para fazer os estudos sobre o regime penitenciário, dedicou-se às pesquisas matemáticas, tentando publicar algumas de suas memórias e concluiu o curso de medicina na Faculdade de Medicina de Paris.

Souzinha ainda se encontrava na Alemanha quando ficou sabendo que havia sido eleito, em novembro de 1856, representante do Maranhão na Câmara dos Deputados. Ele foi indicado por alguns amigos, parentes e admiradores para representar seu distrito eleitoral, que englobava a região de Itapecuru Mirim. Gomes de Souza voltou ao Brasil para tomar posse no início de 1857.

Uma forma de continuar fazendo parte do poder político no século XIX e ter oportunidade de participar de grupos que comandavam as decisões de uma determinada região era ampliar os laços familiares, por meio dos casamentos entre pessoas das famílias que detinham o poder, para que as novas gerações continuassem as alianças.

Ele não se casou com nenhuma mulher nascida no Maranhão, mas, sim, com Rosa Edith, inglesa, filha do reverendo Humber.

Os interesses de Souzinha em casar com Rosa Edith eram outros, segundo Souza (2008, p. 184):

> No início de 1857, já com seus 28 anos de idade, deputado do Parlamento Brasileiro, resolveu que necessitaria se casar, ser chefe de família era uma condição que lhe cobrariam mais cedo ou mais tarde, tanto pela idade, quanto pelo lado político. De imediato pensou em Miss Rosa Edith, a jovem inglesa que havia conhecido há menos de um ano, não porque uma paixão arrebatadora o havia atingido, mas porque ela reunia as condições ideais para ser a sua esposa.

Do pedido ao pai da moça, até o casamento foram apenas oito dias, um casamento rápido com interesse de chegar ao Brasil para assumir o Parlamento Brasileiro, como um homem que respeitava as tradições em vigor em sua terra natal.

Joaquim Gomes de Souza se casou com Rosa Edith, deixou-a na Inglaterra e veio para o Brasil tomar posse do seu cargo. Só em 1858 trouxe a esposa para o Brasil, tiveram um filho e, em 1861, sua esposa morreu com febre tifoide contraída em uma viagem que fez ao interior do Maranhão para apresentar sua esposa à família e conhecer seu eleitorado, pois ele havia se candidatado novamente para o cargo de deputado, ao qual tomou posse em 1861. Em 1863, morreu o seu filho em São Luís, vítima de uma doença repentina que nem ele sendo médico percebeu a gravidade do estado de saúde da criança.

Nos livros, dissertações e artigos analisados na pesquisa sobre a vida e os feitos de Joaquim Gomes de Souza, a maioria deles só apresenta elogios à pessoa de Souzinha,

intitulando-o de gênio. Esse material deixa transparecer um personagem que não teve tempo, nem oportunidade de realizar seus objetivos. Apenas um livro escrito em 1878 por Frederico José Correia (1817-1881), com título "Um livro de críticas", traz duros julgamentos a ele, chamando-o de charlatão.

> A imagem-objeto do homem não se reduz a uma pura coisificação. Pode despertar o amor, a piedade, etc. Mas o importante é que ela seja (e deve ser) compreendida. Na obra literária (como em todas as artes), tudo, até mesmo as coisas inertes (correlacionadas com o homem), é marcado de subjetividade. (Bakhtin, 1997, p. 341)

Passamos agora a apresentar críticas a Joaquim Gomes de Souza, feitas por Frederico José Correia, em sua obra Um livro de Críticas (1878):

> Frederico José Correia é o primeiro intelectual brasileiro a ter dúvidas convincentes quanto à propalada genialidade de Gomes de Sousa, muito antes da revisão das reais dimensões do talento do matemático maranhense ao longo do século 20. [...] O crítico Correia, no lugar de um gênio, enxerga apenas charlatanismo e impostura, sobretudo na biografia de Antônio Henriques Leal a respeito do matemático. (Martins, 2009, p. 660)

Frederico José Correia é ousado em suas palavras, com o intuito de criticar a obra de Antônio Henriques Leal, chamando Joaquim Gomes de Souza de charlatão. Esse julgamento é algo que mereceu nossa atenção na análise, pois precisamos investigar as reais intenções dele, se havia algum fundamento em seus discursos ou se era alguma mágoa que ele detinha, já que a obra o Pantheon Maranhense fazia a biografia de várias pessoas consideradas por Leal como ilustres e Frederico não aparecia entre os biografados.

Para isso observamos fatos da cultura brasileira da época em que Frederico José Correia escreveu essas críticas, e constatamos que por trás de todo esse discurso havia certa revolta relacionada ao fato de ainda viver em um país de certa forma atrasado, ruralizado, com o domínio político de coronéis, onde predominava o analfabetismo; suas ideias eram bem diferentes dos fatos presentes no ideário comum dos intelectuais daquele período.

É fato que Antônio Henriques Leal exaltou Joaquim Gomes de Souza para muito além do que os resíduos documentais permitiram ver. Concordamos com Correia (1878) quando ele tece suas críticas, na falta de um livro que pudesse confirmar a tese de que Souzinha era um gênio.

A obra que Gomes de Souza publicou em 1859, em Leipzig, na Alemanha, impressa pela *F. A. Brokhaus*, também foi alvo das duras críticas de Frederico José Correia.

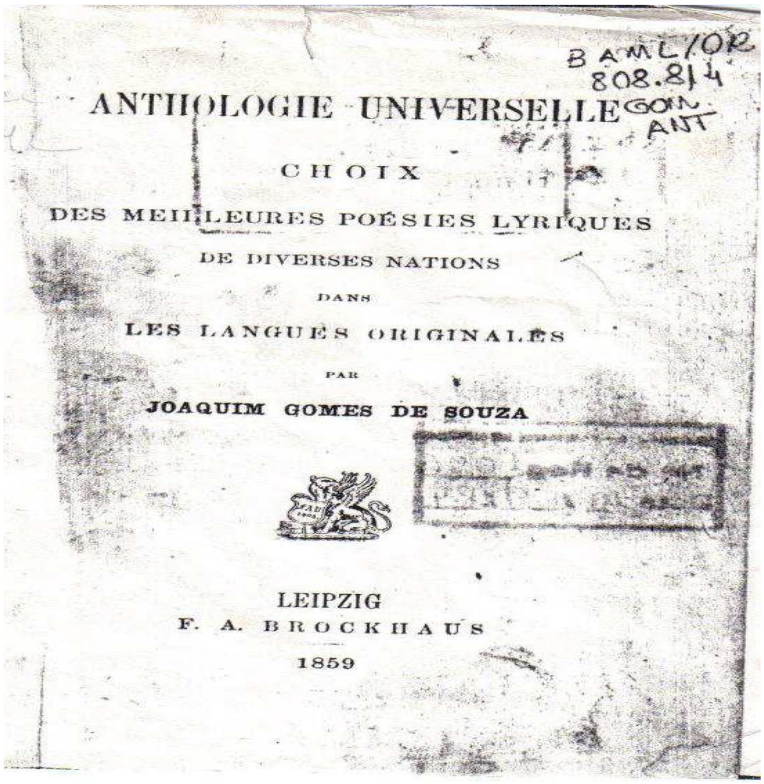


Figura 2. Frontispício de *Anthologie Universelle.*
Fonte: http://www.google.com.br/search/joaquimgomesdesouza

O livro *Anthologie universelle choix des meilleures poésies lyriques de diverses nations dans les langues originales* apresenta quinhentas poesias em dezessete línguas de nações diferentes, foi organizado com duas páginas de capa e contracapa, uma página para a dedicatória, quatro páginas dedicadas ao prefácio, dezoito páginas destinadas ao índice, mostrando a nação a que pertence cada poeta e o título de suas poesias, e novecentos e quarenta e três páginas de poesias.

O título, a dedicatória e o prefácio foram escritos em língua francesa e as demais páginas foram escritas na língua do poeta mencionado. Na página voltada para a dedicatória, Souzinha homenageou Luís Antônio Vieira da Silva, afirmando que a obra era dedicada a ele como sinal de alta consideração por seu talento e sua amizade.

No prefácio da obra, Joaquim Gomes de Souza tenta explicar como foram feitas a organização do livro e as escolhas das poesias, ele deixa evidente que as poesias são de gênero lírico, apesar de algumas serem épicas, e que não foram apenas baseadas em um gosto particular, mas, sim, escolhidas as melhores poesias de cada povo, pois o objetivo dele era dar a oportunidade ao leitor de transpor os limites físicos de seu país e estabelecer um vínculo de fraternidade entre as nações.

É possível perceber nas entrelinhas do prefácio que ele teve ajuda de alguém na escolha dessas poesias, mas não cita nenhuma pessoa, afirma que é um trabalho inédito e dificilmente

alguém fará alguma coisa igual, pois a cada dia surgirão novas poesias e critérios diferentes para organizar algo parecido.

Gomes de Souza não indica como escolheu determinadas nações e poetas, mas afirma que escolheu poetas notáveis e que foi guiado pelo ponto de vista da estética, não explica o porquê de ter colocado alguns poetas brasileiros como se fossem poetas portugueses e não esclarece por que iniciou a obra em francês e depois colocou as poesias nas línguas originais.

Considerando esse contexto, apresentamos o entendimento de Foucault (1926-1984), que compreende que a análise do discurso só pode ocorrer por meio das coisas que ficaram registradas, que foram ditas, já que:

> Só pode se referir a performances verbais realizadas, já que as analisa no nível de sua existência: descrição das coisas ditas, precisamente porque foram ditas. A análise enunciativa é, pois, uma análise histórica, mas que se mantém fora de qualquer interpretação: às coisas ditas, não pergunta o que escondem, o que nelas estava dito e o não-dito que involuntariamente recobrem, a abundância de pensamentos, imagens ou fantasmas que as habitam; mas, ao contrário, de que modo existem, o que significa para elas o fato de se terem manifestado, de terem deixado rastros e, talvez, de permanecerem para uma reutilização eventual; o que é para eles o fato de terem aparecido - e nenhuma outra em seu lugar. (Foucault, 2008, p. 124)

O prefácio é o único lugar da obra em que ele poderia ter indicado como foi a organização do livro; em seguida, ele colocou os nomes dos poetas, a nação a que pertencem e as suas respectivas poesias em sua língua original, sem nenhuma explicação para aquelas escolhas. Em nenhum momento do livro aparecem comentários sobre quando e onde ele começou a fazer o levantamento das poesias, o motivo pelo qual se dedicou mais a alguns poetas do que a outros.

Diante disso, podemos perceber e compreender os motivos que levaram Frederico José Correia a tecer tantas críticas a essa publicação, já que não há na obra nenhuma referência da forma como ele conseguiu os dados, como foi a escolha do idioma e dos poetas, porque ele não escolheu uma língua e reuniu todas as poesias em um idioma só, para quem serviria um livro com essas características, porque deixou de fazer comentários sobre a importância de cada poeta, cada nação, cada poesia, quanto tempo ele gastou para organizar essa obra, quem foram os seus colaboradores, essas e muitas outras questões ficaram sem respostas.

Quando ele escreveu "poètes portugais", deveria querer dizer poetas da língua portuguesa, pois nesse grupo colocou 4 poetas brasileiros, mas não deixou isso claro, o leitor desatento pode achar que todos são de Portugal; talvez ele pudesse ter aproveitado a oportunidade para enaltecer o nome do seu país.

Frederico José Correia em sua obra 'Um Livro de Críticas' demonstra muita fúria a se referir ao modo pretensioso de Souzinha ao organizar a coletânea de poesias sem critérios de

organização, com muitas questões sem respostas, restrita a alguém que dominasse 17 idiomas e gostasse de poesias líricas.

Para Correia essa obra serviria apenas para aumentar seu número de atividades intelectuais, pois naquele período, quanto mais eclético fosse o intelectual brasileiro, mais prestígio ele teria, justificava-se, assim, segundo Correia, o interesse de Joaquim Gomes de Souza em publicar uma obra que tivesse essas características, pois ele iria ser visto como alguém que dominava, além da Matemática, 17 línguas, conhecia bem o gênero lírico e estava por dentro das diversas literaturas.

Correia queria evidenciar em suas críticas, que Gomes de Souza tinha como principal objetivo realizar um fato que pudesse ter um destaque nacional, causando uma admiração dos leigos, um fato extraordinário, coisa digna de gênio, essa forma de autopromoção foi o que gerou tantas críticas de Correia, mas ele vai além e critica até o que ele chama de antologia universal, porque omitiu poetas do Oriente, do Norte e do Sul da América.

Correia menciona em seu livro várias intenções e falhas de Souzinha, mas também apresenta algumas injustiças e exageros em suas críticas, pois ele acusa Gomes de Souza de ter esquecido de contemplar as línguas como o latim e grego, porém isso não é verdade, pois foram apresentadas 18 poesias envolvendo essas duas línguas. Percebemos nesse detalhe que o objetivo de Correia era de desmoralizar a obra de Souzinha.

Apesar de todas as críticas, Correia não afirma em nenhum momento que Joaquim Gomes de Souza não possuía inteligência, muito pelo contrário, depois que ele analisa todas as suas produções, discursos, ele afirma que "talento, não há dúvida, mas talento unicamente de quem lê e aprende e diz o que leo e aprendeo" (Correia, 1878, p. 146). Correia concorda que Souzinha possui um pouco de talento, mas não algo magnífico, ele indica que apenas ele é capaz de ler, compreender e formar textos em determinados contextos de forma persuasiva, demonstrando saber o que está falando.

Em relação à obra inacabada que Leal cita no Pantheon, afirmando que para ser publicada só precisava da introdução e de uma boa redação, essa obra que não havia sido publicada era o *livro Mélanges de Calcul Intégral*, cuja publicação data de 1882 pela editora *F. A. Brokhaus*, financiada pelo governo brasileiro, depois de um projeto aprovado na Câmara dos Deputados da província do Maranhão, exigindo a publicação do livro com os materiais que ele havia deixado na editora em Leipzig, na Alemanha, a mesma editora que publicou a Antologia universal das poesias líricas.

Os materiais deixados por Gomes de Souza foram organizados e revisados pelo professor de Matemática Édouard Anatole Lucas. Esse livro foi prefaciado por M. Charles Henry, amigo de Souzinha e bibliotecário francês.

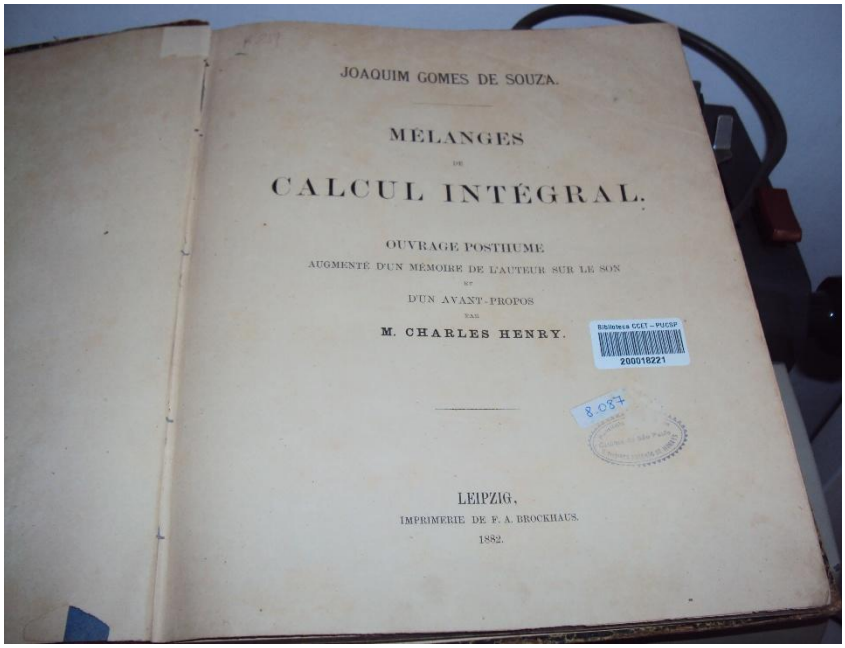


Figura 3. Folha de rosto do livro Mélanges de Calcul Intégral.
Fonte: Foto tirada pela autora (2010); livro encontrado na biblioteca de obras raras da PUC/SP.

Quem conheceu os feitos de Joaquim Gomes de Souza, tendo como base o livro de Antônio Henriques Leal, passou adiante a ideia de gênio e a história contribuiu para espalhar essa fama de intelectual comparável a outros cientistas admiráveis, mas como há pesquisadores que ainda hoje buscam explicações sobre o não reconhecimento de Souzinha, talvez possa justificar alguma coisa, o fato de Joaquim Gomes de Souza ter se dedicado à política talvez possa ter prejudicado o seu desenvolvimento na Matemática, o próprio Leal inicialmente era contrário à candidatura dele a uma cadeira na Câmara dos Deputados, pois isso poderia prejudicar as suas pesquisas.

Como o Brasil estava vivendo um processo de civilização e constituição de um perfil nacional, muitos intelectuais tiveram que se dividir entre a Ciência, a Filosofia, a Arte, a História, a Literatura e a Política porque o país passava por um momento de consolidação e isso, por um lado, contribuiu com a pátria, mas, por outro, não permitiu que um intelectual brasileiro se dedicasse a uma única especialidade e se tornasse um grande representante dessa área. Essa característica era um fenômeno geral que ocorreu no mundo todo.

A falta de brasileiros que tenham se destacado em nível mundial gerou em alguns historiadores brasileiros, como por exemplo, Antônio Henriques Leal, a necessidade de criar

pessoas que apresentassem características de mitos, comparações e lendas, para assegurar uma identidade nacional influenciada por indivíduos comparáveis a grandes gênios europeus.

Devemos, no entanto, atentar para as influências do Romantismo nesse período histórico, e uma das características dessa escola literária era a originalidade, a valorização das coisas que existiam no Brasil, a singularidade da cultura brasileira, a promoção das belezas naturais para que a cada momento o povo brasileiro pudesse se sentir ainda mais feliz pelo fato de ser brasileiro.

O cenário intelectual brasileiro oitocentista não admitia críticas, a partir do momento em que alguém criticava ideias de algum homem de prestígio da época, significava uma ofensa pessoal ou até mesmo um insulto à pessoa, já que alguns se julgavam acima de qualquer desconfiança sobre suas capacidades intelectuais, o indivíduo criticado passaria a atacar e desqualificar moral e intelectualmente a pessoa que o criticou e isso gerava muitos conflitos e inimizades.

Mesmo diante de tudo isso, Frederico José Correia não se omitiu e criticou Leal, Gomes de Souza e outros maranhenses, talvez tivesse os seus motivos, como já exposto anteriormente, algo que tivesse ocorrido e que não tenha sido do agrado de Correia.

Por meio da escrita da História, percebemos que, muitas vezes, a postura de quem a escreve diante da representação do passado pode transformar várias formas de ver os acontecimentos. Como lidar com o prestígio de alguns diante de determinados grupos e registrar fatos, em que são personagens principais, sem elevá-los à condição de herói ou mito?

A valorização de determinados personagens na História pode conduzir a imaginação a momentos pontuais dos registros históricos, remetendo à construção de narrativas que levam às tradições, aos indivíduos e obras respeitáveis, sem levar em conta fatores que proporcionaram esse prestígio.

O livro Pantheon Maranhense: ensaios biográficos dos maranhenses ilustres já falecidos contribuiu também para que, mesmo depois de alguns anos, a ideia de que Joaquim Gomes de Souza teria sido um grande intelectual brasileiro continuasse se propagando, como podemos perceber nas referências escritas nos séculos XX e XXI. Todo esse prestígio dado a Gomes de Souza influenciou a criação da Academia Maranhense de Letras em agosto de 1908, em São Luís, tendo como patrono da cadeira de número oito Joaquim Gomes de Souza.

A linguagem utilizada nas descrições de Leal colocava o biografado em uma posição de gênio, criando sobre a pessoa algo envolto em um mundo de fantasias. Isso pode ser percebido quando ele fala do aprendizado de Souzinha quando ainda estava no primeiro ano do curso de Medicina:

No *Diccionario Bibliographico Portuguez* são encontrados estudos de Innocencio Francisco da Silva (1810–1876), aplicáveis a Portugal e ao Brasil, que foram continuados e ampliados por Brito Aranha (1833–1914), tomo décimo segundo, quinto do suplemento J, publicado em Lisboa na Imprensa Nacional no ano de 1884, 6 páginas que se dedicam a contar a história de Joaquim Gomes de Souza e cita como principal referência a obra de Antônio Henriques Leal.

Nos dados referentes a Souzinha, encontrados no *Diccionario Bibliographico Portuguez*, há uma citação retirada do que ele chama de autobiografia feita por Joaquim Gomes de Souza antes de morrer, na qual deixa claro o desejo de ter o seu trabalho reconhecido pela História brasileira, como podemos perceber em suas próprias palavras:

> Bem que eu tenha estudado mathematicas dúrante muitos annos, e saiba melhor analyse mathematica que qualquer outro ramo de conhecimentos humanos; bem que actualmente seja considerado como financeiro e tenha tomado parte viva nos nossos debates políticos, o meu trabalho de predilecção, aquelle que eu considero como o fim da minha vida e pelo qual sobretudo espero merecer alguma cousa dos meus contemporâneos, se é que eu terei de merecer alguma cousa, é pela obra que eu preparo com o título de Leis da natureza, código de legislação em que, passando em revista o universo inteiro, pretendo expor as leis fixas, gerais e invariáveis que presidiram a sua organização. (Silva, 1884, p. 52)

Constatamos, por meio de sua fala, como ele se reconhece em relação aos seus conhecimentos e como o fato de ter se enveredado por outros caminhos pode ter prejudicado a sua principal vocação, que era a Análise Matemática. A princípio dá a entender que quer ser reconhecido, mas, em seguida, faz a correção "se é que terei de merecer alguma coisa", essa frase leva a imaginar que ele não era tão pretensioso como Correia (1878) afirmava, porém julgava estar terminando um trabalho magnífico fora da área que ele considerava como de maior talento.

Antônio Henriques Leal afirma em seu livro que Gomes de Souza não teve tempo de concluir essa obra que planejara, pois havia muita coisa para ser provada. Nos fragmentos que ele deixou, não se encontra nenhum vestígio de que tenha ocorrido essa publicação.

O fato de registrar esses dados em sua autobiografia sobre uma futura publicação, que não ocorreu, favoreceu a ideia do gênio que não teve tempo de concluir a sua grande obra, a que iria revolucionar uma determinada área. Observando dessa forma, podemos perceber melhor que há intenções por traz desse discurso, ao mesmo tempo em que ele se mostra humilde em relação ao seu reconhecimento, deixa transparecer que esse novo trabalho seria algo grandioso e ainda não havia nenhuma análise de tal material.

No *Diccionario Bibliographico Brazileiro,* quarto volume publicado em 1898, no Rio de Janeiro, pela Imprensa Nacional, escrito por Augusto Victorino Alves Sacramento Blake, são dedicadas duas páginas e meia a Joaquim Gomes de Souza, em que se evidencia em grande parte a genialidade dele, relatando as suas publicações e detalhando seus estudos na Europa,

afirmando que ele "não fazia alarde dos muitos títulos scientificos de universidades e das academias de Londres, Berlim e Vienna d'Austria, das quaes era sócio". (1898, p. 142)

Esse *Diccionario* cita como referências o livro de Antônio Henriques Leal e o *Diccionario Bibliographico Portuguez*; entre os elogios que aparecem nos relatos do *Diccionario* ele afirma que o apelido de Gomes de Souza era de "genio mathemático" (1898, p.142). Mais uma vez percebemos a forma de apresentação dos dados concernentes ao matemático, pois em nenhum momento o autor questiona alguma incoerência em relação às publicações diversificadas, que são citadas no *Diccionario*, apenas contribui para enaltecer a imagem de Souzinha.

Euclides da Cunha (1999) emite sua opinião sobre Joaquim Gomes de Souza em sua obra póstuma 'A Margem da História', em que evidencia a sua admiração.

Foucault mostra por meio de suas concepções que todas as coisas faladas, escritas ou pensadas estão vinculadas a relações de poder e saber, já que são relacionadas a práticas sociais que envolvem instituições, textos, percepções diversas voltadas e ancoradas às diferentes formas de poder que estão em constante atualização.

Leal (1987) afirmou que a entrada de Souzinha na política atrapalhou as suas pesquisas. Quando atuava como professor na Escola Militar que se tornou Escola Central, ele se dedicava muito aos estudos, estava sempre em contato com novas pesquisas, mas a partir do momento em que foi nomeado, por volta de 1852, para ocupar o cargo de Secretário da Comissão Diretora da Construção e do Regime Interno da Casa de Correção da Corte, deixou de se dedicar só às pesquisas.

Foi nesse cargo que surgiu a oportunidade de viajar à Europa com a desculpa de ir conhecer e analisar o sistema penitenciário europeu, com o objetivo de reformar o sistema brasileiro, mas como era professor iria aproveitar para estudar os observatórios astronômicos na França e na Inglaterra.

Podemos perceber que Souzinha gostava de se ocupar de muitas atividades, já que ele tinha uma missão de funcionário público e estava sempre se dedicando às pesquisas matemáticas e físicas e, ainda, teve tempo de concluir na França o curso de Medicina que iniciou no Rio de Janeiro, sem contar que tinha seus problemas de saúde.

Foram encontrados em uma carta escrita, em 1857, por João Francisco Lisboa, endereçada a Antônio Henriques Leal, comentários sobre a postura de Joaquim Gomes de Souza diante de alguns fatos. Ele escreveu após Gomes de Souza visitá-lo em Portugal, quando estava vindo ao Brasil tomar posse do cargo de deputado.

Em outros trechos da carta, Lisboa evidencia que Gomes de Souza tinha hábitos de pessoa solitária, apresentava ser muito tímido, introspectivo, falava em tom baixo, chega a

afirmar que: "No todo tem seus ares de uma moça delicada e tímida" (LISBOA *apud* SOUZA, 2008, p. 188), gostava de conversar sobre temas que interessava a ele e não era de perder tempo com assuntos fora do seu contexto.

Apesar de ter um perfil de intelectual compromissado com suas pesquisas e não de político, ficou contente em ser eleito deputado, mesmo estando morando fora do Brasil foi indicado e se elegeu por três mandatos (1857 a 1860), (1861 a 1863), (1864 a 1867), mas não conseguiu cumprir o último mandato por causa da sua saúde debilitada e consequente falecimento.

Depois que assumiu o seu cargo como deputado, não tentou fazer mais nenhuma publicação, percebemos que sua entrada na política atrapalhou seus objetivos de cientista, apenas gerando uma expectativa muito grande por parte de seus admiradores, mas não se concretizando nada de fato.

Um questionamento feito por um colega do estudioso na Câmara evidenciava que Joaquim Gomes de Souza de fato estava apaixonado pela carreira parlamentar, pois foi acusado por outro parlamentar de ter planos para disputar uma vaga no Senado. A essa acusação ele nada respondeu, pois de fato tinha interesse, porém não tinha idade, naquela época só era possível disputar uma cadeira no Senado a partir dos 40 anos de idade. Ele tinha tudo para conseguir essa vaga.

Os parentescos e os apadrinhamentos contavam muito naquele momento, é possível que isso tenha influenciado nas indicações para as três eleições em que ele concorrera a deputado. Não estamos pondo em dúvida a sua competência, porém há indícios de alguns privilégios, pelo fato de manter um bom relacionamento com o Império.

> Quero dizer que em uma sociedade como a nossa, mas no fundo em qualquer sociedade, existem relações de poder múltiplas que atravessam, caracterizam e constituem o corpo social e que estas relações de poder não podem se dissociar, se estabelecer nem funcionar sem uma produção, uma acumulação, uma circulação e um funcionamento do discurso. Não há possibilidade de exercício do poder sem uma certa economia dos discursos de verdade que funcione dentro e a partir desta dupla exigência. (Foucault, 1979, p. 101)

Souzinha se destacou como parlamentar, defendeu vários projetos, inclusive alguns voltados aos problemas ligados à Educação, saiu em defesa da mudança do extenso currículo da Escola Militar, lançou dois aditamentos propondo a concessão de duas loterias em favor da Escola Politécnica de Agricultura do Maranhão e duas em favor do Estabelecimento dos Educandos Artífices do Maranhão.

Lutou pela fixação das pessoas no trabalho rural, defendeu um exército forte para cuidar da segurança interna e externa do Brasil, demonstrou zelo com os gastos públicos, lutou pelo fim da submissão do Brasil aos países estrangeiros, participou da Comissão de regularização da

navegação na província do Espírito Santo, da Comissão de Instrução Pública, participou, também, da Comissão de orçamento e contas.

Passou a ter contato mais com a sua província sentindo o gosto de conviver com pessoas que o admiravam, conversava com os eleitores, discutia problemas locais e regionais. Atravessou dois momentos tristes, quais sejam, a morte de sua esposa e um ano depois a de seu filho, sem conseguir diagnosticar o problema da morte de seu único herdeiro.

Joaquim Gomes de Souza tinha tuberculose e fez de tudo para aliviar os seus problemas de saúde, tomava medicação adequada, mudou para regiões de serra no Rio de Janeiro, mas não conseguiu resistir por muito tempo, licenciou-se de um dos mandatos, casou novamente para ter alguém que cuidasse melhor dele, porém não conseguiu cumprir o último mandato e faleceu em Londres em mais uma tentativa de tratamento para melhorar as suas dificuldades respiratórias.

Após sua morte muitas homenagens foram feitas a ele, foram encontradas em Itapecuru Mirim – MA, cidade onde ele nasceu, bem como em São Luís – MA, Itaocara – RJ, Hulha Negra – RS, Rio de Janeiro – RJ e até em São Paulo – SP, homenagens presentes em nomes de escolas, nomes de ruas, nome de praças, monumentos, bustos e outros.

Na *Encyclopedia Science Technology, and Society*, publicada em 2005 pela *OXFORD University Press,* na parte que trata da História da Ciência, encontramos um trecho dedicado a Joaquim Gomes de Souza, comentando as suas notas publicadas na *Académie des Sciences* de Paris, na *Royal Society*, e o livro publicado depois de sua morte: *Mélanges de Calcul Integral*.

No *Webster's Online Dictionary - Brockaus Webster's Timeline History* 1772-2007, tendo como editor o professor *Ph.D. Philip M. Parker*, publicado em 2009, foram dedicadas algumas linhas a Joaquim Gomes de Souza comprovando a publicação de 1859, qual seja, "*Anthologie Universelle choix des meilleures poésies lyriques de diverses nations dans les langues originales*".

Quem encontrar o nome de Gomes de Souza nessas publicações históricas internacionais, sem levar em conta outros dados em torno das suas produções e dos questionamentos que surgiram, poderá construir uma imagem de alguém com muito prestígio em vários países, a ponto de ter o seu nome gravado nesse tipo de publicação estrangeira, o que poderia não corresponder ao que de fato ele foi.

Livros, dicionários, revistas, artigos, redes sociais e *blogs* são espaços capazes de promover e enaltecer muitos nomes, perceber o prestígio de uma pessoa apenas pelo registro em um desses meios não pode ser considerado suficiente, pois as fontes históricas que proporcionaram esses dados devem ser levadas em consideração.

A CONSTRUÇÃO DE UMA IMAGEM DE SOUZINHA

Na investigação para este trabalho, em busca da construção de uma imagem de Souzinha, analisamos doze textos escritos, os mais presentes nas pesquisas que envolvem a história de Souzinha. Entre eles há seis livros (dois do século XIX, dois do século XX e dois do século XXI); três artigos publicados no século XX; um artigo e duas dissertações de mestrado, escritos no século XXI. Os diferentes discursos presentes nesses textos possibilitaram a compreensão dos objetivos que levaram cada autor a escrever sobre Souzinha, bem como das influências que tiveram.

Analisamos, também, a autobiografia de Souzinha e o que ficou registrado na matemática presente em suas memórias. O entendimento das diversas formas do uso da linguagem na investigação dos fatos históricos, que envolvem a história de Souzinha, foi obtido pela utilização dos elementos da análise do discurso francesa. Esse referencial teórico-metodológico e as concepções de Foucault e Bakhtin possibilitaram relacionar História e Linguística.

Foi possível, ainda, perceber como foram registrados os fatos que fizeram Joaquim Gomes de Souza se tornar nome de rua, nome de escolas e de praças. Observamos os motivos que levaram à escrita de livros sobre esse personagem e à realização de homenagens públicas presentes em monumentos.

> Ninguém pode construir uma auto-imagem isenta de mudança, de negociação, de transformação em função dos outros. A construção da identidade é um fenômeno que se produz em referência aos outros, em referência aos critérios de aceitabilidade, de admissibilidade, de credibilidade, e que se faz por meio da negociação direta com outros. Vale dizer que memória e identidade podem perfeitamente ser negociadas, e não são fenômenos que devam ser compreendidos como essências de uma pessoa ou de um grupo. Se é possível o confronto entre a memória individual e a memória dos outros, isso mostra que a memória e a identidade são valores disputados em conflitos sociais e intergrupais, e particularmente em conflitos que opõem grupos políticos diversos. (Pollak, 1992, p. 204)

Durante a pesquisa, refletimos sobre acontecimentos que ocorrem normalmente, percebemos que, quando alguns são mais destacados nas diversas mídias, consequentemente são lembrados mais do que os outros, sendo, com isso, possível medir as dimensões e o grau de importância que tornaram as pessoas notáveis para a história de um grupo.

As diferentes formas de narrar a história de acontecimentos nos fizeram perceber a materialização dos valores e das crenças, e que o jeito de apresentar fatos orienta a compreensão do presente para uma pessoa ou para um grupo social. Assim, reconstruir a forma de narrar esses acontecimentos históricos foi uma maneira de repensar e refletir sobre os textos escritos e os fatos relacionados à história de Souzinha.

Bakhtin (2001, p. 11) assegura que: "Para entrar na história é pouco nascer fisicamente: assim nasce o animal, mas ele não entra na história. É necessário algo como um segundo nascimento, um nascimento social".

A interação verbal é uma das formas que Bakhtin utiliza para explicar as influências que cada sujeito exerce sobre o outro nas relações sociais. Levando-se em conta essa referência, observamos e percebemos como ocorre esse nascimento social, como acontece e se interpreta a percepção desse fenômeno que está vinculado às relações culturais e sociais vivenciadas pelas pessoas.

Miguel e Miorim (2004, p. 161) afirmam que:

> Ao dialogarmos com a historiografia – acabamos por constituir uma nova história, não apenas porque fazemos perguntas novas ao passado, mas também, e, sobretudo, porque incorporamos novas fontes, novas vozes a esse diálogo; percebemos novas possibilidades de estabelecimento de relações entre discursos aparentemente desconexos e incomensuráveis; porque impomos ao passado novos deslocamentos, novos focos de descontinuidade e novos elos de continuidade, etc.

Debatemos sobre o que tem valor nas diferentes formas de registro da memória histórica. Assim, foi considerada a estrutura social vivida por pessoas ou por grupos sociais, uma vez que, por meio dessa composição social, formam-se os subsídios para a construção da narrativa histórica, que aparece registrada em livros, revistas, monumentos, documentos e, até mesmo, em filmes. Tudo isso se vincula em ações institucionalizadas como escolas, museus, bibliotecas, casa de cultura, ou mesmo em narrativas que representam tradições, como por exemplo, festas populares, homenagens orais e outras.

Os aspectos culturais se tornam atos humanos, a partir do momento em que a pessoa nasce e se desenvolve, passam por uma ação que envolve o histórico-cultural que compõe o funcionamento psicológico do ser humano. Esse indivíduo se distingue das outras pessoas, forma significados que são compartilhados e divididos nos grupos sociais, a partir daí é construída sua própria trajetória de desenvolvimento.

O significado histórico de uma pessoa para determinados grupos ocorre de forma diferenciada, pois uma imagem dessa pessoa pode estar vinculada a vários fatos. O conhecimento em relação aos fatos que envolvem esse grupo é uma das formas de comprovar como foi desenvolvido o seu carisma e o seu espírito de liderança.

> Portanto, o indivíduo é uma produção do poder e do saber. Não é apenas em relação às instituições que essa produção pode ser pensada. Acredito que, muito antes do ingresso do estudante na instituição, a vigilância é exercida, num primeiro momento, pela família que supõe uma ordem que não é nem formulada, nem explicada, mas suficiente para propiciar o comportamento esperado. Fora dessa ordem primeira e, mais claramente na universidade, o indivíduo estará sob fiscalização permanente, que hierarquiza, que produz "...aptidões individualmente caracterizadas mas coletivamente úteis." (Foucault, 1979, p. 147)

Foucault considera que a pessoa é resultado de uma forma de cultivo de poder e de saber, que só pode ser evidenciada por meio da vigilância e isso não ocorre por acaso.

Uma liderança surge dentro dos grupos, por meio dos códigos que envolvem o grau de autoridade, a importância e o prestígio, influenciadas pela vocação que cada líder possui, ou seja, aptidão capaz de exercer uma liderança, ter argumentos para comandar grupos e decidir sobre fatos e acontecimentos. Essas posturas, em relação aos grupos, colaboram para a valorização da pessoa nas narrativas históricas.

> Tudo se passa como se os interditos, as barragens, as entradas e os limites do discurso tivessem sido dispostos de maneira a que, ao menos em parte, a grande proliferação do discurso seja dominada, de maneira a que a sua riqueza seja alijada da sua parte mais perigosa e que a sua desordem seja organizada segundo figuras que esquivam aquilo que é mais incontrolável; tudo se passa como se se tivesse mesmo querido apagar as marcas da sua irrupção nos jogos do pensamento e da língua. Há sem dúvida na nossa sociedade, e imagino que em todas as outras, com base em perfis e decomposições diferentes, uma profunda logofobia, uma espécie de temor surdo por esses acontecimentos, por essa massa de coisas ditas, pelo surgimento de todos esses enunciados, por tudo o que neles pode haver de violento, de descontínuo, de batalhador, de desordem também e de perigoso, por esse burburinho incessante e desordenado do discurso. (Foucault, 2002, p. 14)

Cada instituição ou grupos apresentam características diferenciadas em relação à construção de uma imagem de uma pessoa. As universidades, os centros de pesquisa, as academias, associações, sociedades científicas, as comunidades religiosas e as sociedades civis definem características próprias para constituírem as narrações históricas sobre a construção de uma imagem de um determinado sujeito.

Ao nos depararmos com monumentos, bustos, fotografias em museus, nomes de ruas, nomes de praças, raramente as pessoas se mostram curiosas o bastante para ler ou pesquisar sobre determinado homenageado, para saber qual a importância dele, porque o nome dele está ali. Muitas vezes a homenagem foi feita com tanta admiração na época e hoje em dia é vista apenas como um nome, não há questionamentos sobre esse tipo de registro histórico.

Os fatos do passado que se apresentam por meio de monumentos, bustos, estátuas, fotografias, nomes dados a ruas, praças, prédios, órgãos públicos ou particulares passam despercebidos, mas são registros importantes da história da pessoa homenageada. Os motivos que levaram autoridades a elaborar um projeto para criar denominações, ajudam a contar a história daquela pessoa.

As heranças do passado têm como principal objetivo perpetuar a imagem da pessoa que recebeu a homenagem, contribuir para a memória coletiva, permitir que seus feitos sejam repassados e que possam servir de exemplo para novas gerações.

O fato de termos considerado textos escritos, falados, registros em nomes de ruas, praças, escolas, bustos, estátuas e outros, fontes históricas, implicou a necessidade de uma

concepção teórica de linguagem para sua interpretação. Por isso, propusemos um entendimento em torno das questões que envolvem o sentido nos discursos, a fim de compreender como se constituiu uma imagem de Souzinha.

No percurso desta pesquisa, verificamos como eram os padrões de referência do século XIX, tanto em relação aos letrados, quanto em relação aos intelectuais e políticos. Para Del Priore (2009), esses padrões eram baseados em uma concepção que se fundamentava em atribuir a alguns homens de destaque uma inteligência incomum, e que criava a partir dessas características mitos e lendas sobre determinadas pessoas. Com isso, era reforçada a admiração e o respeito da opinião pública.

Elementos que envolvem a construção de uma imagem de alguém são repassados por meio da ação e da reação que são provocadas nas pessoas ou em grupos responsáveis por manter vivos os fatos que formaram essa imagem. Toda forma possível de admiração, respeito e prestígio dessa pessoa, seguramente estará registrada em diversos materiais, noticiários e símbolos, a mesma coisa acontece quando a imagem da pessoa é desgastada.

> É nesse sentido que um autor modifica todas as particularidades de um herói, seus traços característicos, os episódios de sua vida, seus atos, pensamentos, sentimentos, do mesmo modo que, na vida, reagimos com um juízo de valor a todas as manifestações daqueles que nos rodeiam: na vida, todavia, nossas reações são díspares, são reações a manifestações isoladas e não ao todo do homem, e mesmo quando o determinamos enquanto todo, definindo-o como bom, mau, egoísta, etc., expressamos unicamente a posição que adotamos a respeito dele na prática cotidiana, e esse juízo o determina menos do que traduz o que esperamos dele; ou então se tratará apenas de uma impressão aleatória produzida por esse todo ou, enfim, de uma má generalização empírica. (Bakhtin, 1997, p. 26)

No século XIX, podemos encontrar, na história brasileira, relatos de que havia poucas pessoas que dominavam apenas uma área, geralmente, estavam envolvidas em várias frentes intelectuais. Isso pode ser uma explicação para o fato de Gomes de Souza ser merecedor de tantos elogios e de ter um prestígio regional muito grande.

Os historiadores Del Priore e Venâncio (2010, p. 176) afirmam que:

> Por essa época, havia no Brasil pouca especialização da atividade intelectual. Um indivíduo podia, ao mesmo tempo, ser magistrado, jornalista, romancista, poeta, historiador, arqueólogo, naturalista, transitando, assim, em diversas áreas do conhecimento.

Pelo fato de o Maranhão ter sido denominado de "Atenas brasileira", nome dado em virtude de existir um grupo de maranhenses, entre 1832 e 1868, do qual Joaquim Gomes de Souza fazia parte, considerados gênios por um projeto regulado por um referencial europeu, as gerações que vieram após esse grupo se consideraram herdeiras de uma cultura muito importante, comparada à grega. Vale ressaltarmos que o Maranhão era apenas uma província, porém se julgava no direito de ser referência europeia para as demais províncias brasileiras.

Para entendermos um pouco mais sobre as situações geradas pelos fatos citados no parágrafo anterior, salientamos que grande parte do século XIX foi influenciada pelas ideias presentes no Romantismo.

O Romantismo no Brasil contribuiu também para a valorização de temas brasileiros, especialmente os ligados à exaltação da natureza, criando uma concepção paradisíaca da realidade brasileira. Foi nesse período que a História oficial brasileira começou a se organizar. Iniciou-se o processo de identificação, seleção e arquivamento de vários documentos para garantir dados sobre a identidade nacional.

O artigo: "O Plutarco brasileiro, a produção dos vultos nacionais no Segundo Reinado", escrito por Armelle Enders (2000), mostra como foi a forma de recensear e homenagear os mortos no Brasil, como já ocorria na Europa. Havia, pois, a necessidade de homenagear e respeitar a memória dos grandes homens e valorizar os seus feitos.

Inicialmente a organização e a busca pelo nome das pessoas que morreram ficaram por conta das instituições culturais e artísticas do Império; mais tarde o Instituto Histórico e Geográfico Brasileiro (IHGB) se tornou responsável por essa compilação de dados e as publicações já começaram no segundo número da revista do IHGB com o seguinte título: "Brasileiros ilustres pelas ciências, letras, armas e virtudes, etc ... "

> Essa lista aberta ("etc ... ") se inscreve em uma tradição clássica e universal. O "panteão de papel" brasileiro, erigido pela Revista do IHGB e pelos numerosos dicionários biográficos publicados durante o reinado de dom Pedro II, não é, contudo a simples réplica de um monumento de estilo internacional. Conforma-se às leis gerais que orientam a história do Brasil, como sucessão de fatos e como narrativa, e que foram definidas por Martius em nome do IHGB. O recenseamento dos grandes homens extrapola, além disso, o debate acadêmico. A administração da posteridade, por suas implicações sociais, produz o encontro da história com a memória, mistura os campos intelectuais e políticos. (Enders, 2000, p. 42)

Essa forma de homenagem, citada por Enders (2000), é semelhante aos fatos descritos no livro de Antônio Henriques Leal: "Pantheon Maranhense: ensaios biográficos dos maranhenses ilustres já falecidos". Leal se inspirou nas ideias da época para manter viva a memória de pessoas que foram consideradas importantes. Difícil era compreender o grau de importância que cada uma tinha e como se definia uma pessoa eminente.

> As escolhas biográficas dos historiadores brasileiros conservam do grande homem das Luzes, seu caráter coletivo. Os "brasileiros ilustres" são salvos do esquecimento sob a forma de dicionários**.** A seção da Revista do IHGB dedicada aos "Brasileiros ilustres pelas ciências, letras, armas e virtudes, etc..." não foge à regra. Entre 1839 e 1888, 118 personagens foram aí destacados. Embora a seção por vezes desapareça da revista, como entre 1852 e 1856, isso não impede que sejam publicados artigos biográficos ou necrológios minuciosos. A redação da revista não se preocupa em apresentar considerações metodológicas para justificar a seção. Na primeira vez que ela aparece, é precedida de uma rápida justificativa que insiste no dever patriótico de preservar a memória das figuras que se tornaram ilustres. (Enders, 2000, p. 43)

Apresentamos algumas explicações para compreender melhor certos fatos que marcaram as formas de registro da história de Souzinha. Como ele nasceu no Maranhão, notamos que, durante certo período, esse Estado foi visto como aquele:

> Cuja capital foi legitimada historiograficamente em 1612, quando de sua suposta fundação, como a única de origem francesa, fundada por Daniel de La Touche (Senhor de La Ravardiere), François Rasilly, Yves d'Evreux; àquela que se tornou parte da sede administrativa do Brasil, segundo Carta Régia de junho de 1621 [...]; lugar onde morou o Padre Antônio Vieira [...], cujos sermões seriam no futuro pinçados na recomposição da história literária no Brasil e do Brasil; região evocada no século XIX como lugar onde se falava o melhor e mais casto português; penúltima fronteira a aderir a independência do Brasil; província a ter o segundo teatro brasileiro mais antigo e a quarta em aparecimento da imprensa; lugar de eclosão da Balaiada; região exportadora de algodão, açúcar e arroz. [...] para assegurar a idéia de diferenciação social, foi o lugar de nascimento, adoção, espaço de congregação dos literatos [...]. (Borralho, 2009, p. 27)

Vários fatos ligados à cultura, à literatura e à política presentes tanto na fundação quanto no desenvolvimento do Estado foram observados. Havia a necessidade das pessoas, nascidas no Maranhão daquela época, de manter vivas todas as qualidades do Estado, especialmente tendo como base a sua capital, São Luís, tudo o que aconteceu lá ocorreu com diferenciação, com perfeição, por isso poderia ser considerada como "Atenas Brasileira".

Foucault (2002, p. 2) afirma que: "O discurso não é simplesmente aquilo que traduz as lutas ou os sistemas de dominação, mas é aquilo pelo qual e com o qual se luta, é o próprio poder de que procuramos assenhorear-nos".

Para que todo o Brasil pudesse ter acesso à grandiosidade de São Luís, os escritores daquele período registraram em livros, jornais, revistas as coisas boas que ocorriam por lá. Um dos grandes responsáveis por criar essa ideia de homens símbolos do Estado do Maranhão foi Antônio Henriques Leal.

Frederico José Correia tinha valor reconhecido tanto nos debates políticos como nas controvérsias literárias e foi um dos únicos escritores do Maranhão que não adotou esta forma literária carregada de elogios para descrever os maranhenses:

Esse escritor estava na contramão do que ocorria no Brasil. Entravam em cena os grupos que publicavam tributos aos seus vultos, a revista do IHGB não foi a única a fazer esse tipo de homenagem. De fato, se alguém se sentisse esquecido pela revista poderia organizar um livro para honrar quem tivesse contribuído para o País, fosse brasileiro ou não.

Segundo Enders (2000), em meados do século XIX, surgiu no Brasil um gênero literário denominado de "brasileiros ilustres", organizado por escritores que colaboravam para a revista do IHGB, e também faziam as suas publicações independentes.

Exemplos dessas publicações são os livros: "O Plutarco brazileiro", escrito pelo historiador e político João Manuel Pereira da Silva (1817–1898) em 1847; "Os varões ilustres

do Brazil durante os tempos coloniais", publicado em 1868 como uma revisão e ampliação do livro de João Manuel Pereira da Silva de 1847; em 1861 foi publicado em dois volumes o livro "Galeria dos brasileiros ilustres (os contemporâneos) (desde 1822)", litografado por Sébastien Auguste Sisson (1824–1893).

Em 1862 foi publicado o livro "As brasileiras célebres", escrito por Joaquim Norberto de Souza Silva (1820–1891). Em 1871 foi publicado no Rio de Janeiro o "Diccionário biographico de brasileiros célebres 'nas Letras, Artes, Política, Philantropia, Guerra, Diplomacia, Indústria, Sciências e Caridade' desde o ano 1500 até nossos dias".

Já, em 1876, Joaquim Manoel de Macedo (1820–1882) organizou uma espécie de calendário denominado "Ano biographico brazileiro" para participar de uma exposição nos Estados Unidos. Foi publicado, também, o livro "Pantheon Fluminense esboços biográphicos" em 1880 por Prezalindo Lery Santos. Mais tarde em 1898 foi publicado o "Diccionario Bibliographico Brazileiro", escrito por Augusto Victorino Alves Sacramento Blake.

Também faz parte desse período o livro escrito por Antônio Joaquim de Melo (1794–1873), "Biografias de alguns poetas e homens ilustres de Pernambuco", publicado de 1856 a 1859, e a obra "Pantheon Maranhense: ensaios biográficos dos maranhenses ilustres já falecidos", de Antônio Henriques Leal (1873–1875). De acordo com a biografia de Antônio Henriques Leal, ele também foi sócio-correspondente do IHGB.

Por meio do livro 'Pantheon Maranhense: ensaios biográficos dos maranhenses ilustres já falecidos', Leal evidencia a construção de um tipo de memória sobre os feitos desses maranhenses ligados aos fatos da história brasileira, como algo tão importante que vai além da imortalidade, com o objetivo de apresentar para as gerações futuras, por meio das biografias, seu testemunho verídico.

Leal traça o perfil de Gomes de Souza da mesma forma que Enders (2000), como testemunha viva de quem conviveu com ele, participou junto com ele do partido liberal e não deixou a memória do seu amigo ser esquecida ou desvalorizada. Ele fez de tudo para criar e ampliar a ideia de que Souzinha foi um homem muito inteligente, intelectual que atuou bem em várias áreas e que não teve oportunidade e tempo para mostrar todo o seu valor e as suas capacidades. A admiração de Leal por Souzinha, foi passada a pesquisadores que continuaram levando-a adiante.

Joaquim Gomes de Souza conseguiu se manter no grupo dos maranhenses ilustres porque conseguiu mostrar o seu esforço, destacou-se na Academia Militar, na política, era um intelectual respeitado e contribuiu para o plano de conservar o Maranhão como um local importante para o Brasil, cheio de pessoas cultas e com destaque na Europa.

A maioria das pessoas que escreveram sobre Joaquim Gomes de Souza cita o livro de Antônio Henriques Leal e faz muitos elogios a Souzinha. Para compreendermos melhor porque grande parte dos relatos sobre Souzinha é muito parecido ou segue a mesma linha de pensamento, encontramos em Bakhtin (1998, p. 140) a seguinte afirmação:

> É suficiente prestar atenção e refletir nas palavras que se ouvem por toda parte, para se afirmar que no discurso cotidiano de qualquer pessoa que vive em sociedade (em média), pelo menos a metade de todas as palavras é de outrem, reconhecidas como tais, transmissíveis em todos os graus possíveis de exatidão e imparcialidade (mais exatamente, de parcialidade).

Bakhtin evidenciou que a apropriação das palavras de outras pessoas, geralmente, resulta de uma adoção de posição que foi previamente avaliada e que apresentou um valor social e moral ligados à repercussão do assunto, ou seja, somos levados a tomar partido em determinados acontecimentos, seguindo ideias de grupos que mostram os fatos.

Os diferentes meios de comunicação social auxiliam no registro histórico de fatos, muitas vezes sendo responsáveis por imagens que enaltecem ou difamam pessoas. Os expectadores desses meios são levados a concordar com tudo que é veiculado por eles, aceitando os fatos sem discutir os interesses que estão em jogo.

O livro de Leal registrou de forma tão forte o lado bom dos maranhenses ilustres, que a história não permitiu que as críticas que foram feitas por Frederico José Correia maculassem o nome de Souzinha e de outros biografados. A única repercussão que tiveram essas críticas foi pequena e em nível regional, pois nenhum pesquisador que escreveu sobre Gomes de Souza comentou sobre isso.

O projeto da elite maranhense de manter a ideia de que o Maranhão produzia cultura e tinha filhos intelectuais de destaque no Brasil e na Europa implicava a divulgação, a transformação e a construção da imagem dos intelectuais, para que cada vez mais o Maranhão pudesse ser destaque no cenário nacional, a fim de que os maranhenses analfabetos tivessem orgulho de morar em um Estado forte e diferenciado.

> Sempre foi moeda de troca, um arauto, um salvo-conduto todas as vezes que o isolamento geográfico, político e econômico fazia os moradores desta cidade se lembrarem de suas condições objetivas. A Atenas era, e ainda é, uma idealização do passado, [...] identificação entre os moradores da cidade que se sentiam, e ainda se sentem, irmanados por um passado brioso, estabelecendo um modus vivendis pautador de ações de políticas públicas, desenhos de configuração urbana, criando sentidos de memória e pertencimento social. (Borralho, 2009, p. 260)

Na época de Joaquim Gomes de Souza, a identidade de alguns maranhenses era construída com base em uma cultura europeia, refinada e erudita, para firmar a ideia de que São Luiz era a única capital fundada por franceses. Esses deixaram muitos traços de sua cultura presentes na arquitetura, nos costumes, na arte e nos ideais de civilização, já que estavam a dois

graus ao sul do Equador, na fronteira sócio-geográfica entre a Amazônia e o Nordeste do Brasil; os maranhenses se sentiam mais perto da Europa do que da capital brasileira.

Conforme os princípios estabelecidos por Foucault (2002) quanto ao comportamento dos discursos e suas características, entendemos que, por meio do princípio de inversão, a história em torno de Souzinha surge a partir do momento em que um jovem não consegue se firmar na carreira militar que era algo natural para ele, por existir uma tradição familiar de militares, e passa a ter sucesso em um curso de Ciências Físicas e Matemáticas, sendo capaz de apresentar uma tese de doutorado inédita aos 19 anos.

Para isso ele contou com admiradores que possuía na Escola Militar, mas também enfrentou adversários que discordavam da permissão que deram a ele para realizar os exames para a conclusão do curso de bacharelado em Ciências Físicas e Matemáticas. A partir do momento em que ele apresentou a sua tese de doutorado, conseguiu se tornar professor substituto na mesma Instituição, a partir daí a Escola Militar deixou de ser o espaço único de conquistas.

Com esse brilhantismo e destaque na Escola Militar, ele despertou a atenção de D. Pedro II e foi nomeado para ocupar um cargo no Império. Como já estava publicando seus artigos na revista Guanabara e o seu cargo exigia a ida para Europa, aproveitou para tentar publicar suas Memórias nos melhores centros de pesquisas na França, na Inglaterra e na Alemanha.

Pelo princípio de descontinuidade, percebemos os discursos se entrelaçando, apesar de apresentarem ideias contrárias, duas frentes se formaram em torno dele, todos passaram a admirar sua precocidade com as realizações na Escola Militar. Nesse contexto, a família e os amigos do Maranhão começaram a ter interesse de levá-lo para a política, pressentindo que ele poderia obter sucesso nessa carreira. Por outro lado, os intelectuais que o conheciam não apoiavam a ideia de sua entrada na política.

As tradições familiares não foram suficientes para encaminhá-lo à carreira militar em virtude de seus problemas de saúde e por causa de seu corpo franzino, porém, a partir da conquista do cargo no Império, abriu-se a possibilidade de se tornar um representante político em sua província.

A opinião de Gomes de Souza não aparece clara nesses discursos, pois não deixou escrito em sua autobiografia sua concepção sobre o período em que se tornou deputado provincial pelo Maranhão, mas ele foi seduzido pela ideia de ser representante de sua região, de merecer a confiança de pessoas poderosas e ao mesmo tempo do povo simples que vivia sendo explorado.

O princípio de especificidade de Foucault (2002) evidencia os discursos que não foram ditos, mas que são passíveis de serem percebidos, por isso, por meio dele, percebemos a decepção de Souzinha pela não publicação de suas Memórias matemáticas em centros de pesquisas europeus.

Se Gomes de Souza não conseguiu o prestígio que achava ser merecedor na Europa, era melhor voltar ao Brasil, trabalhar por seu povo, já que havia sido eleito deputado provincial, representante do Maranhão, sem ao menos morar na região que o elegeu. Desencadeou em Souzinha a vontade de cumprir o seu mandato de deputado, conhecer as formas de se fazer política no Brasil, ser um bom representante, para com isso ter a oportunidade de obter prestígio em seu país.

Ele não revela em seus escritos, mas adquiriu uma grande paixão pela carreira política, a ponto de se arriscar para conhecer e manter contato com o povo de sua região. Seus problemas de saúde eram visíveis, mas mesmo assim viajou por vários lugares. Perdeu a sua esposa e filho nessas andanças. Sempre foi uma pessoa reservada, gostava de ficar em sua casa estudando e, depois que se tornou deputado, passou a expor as suas convicções, discutindo suas concepções, sem temer seus adversários políticos, com o objetivo de mostrar que era capaz de atuar em outros cargos nessa carreira que poderia lhe ser muita promissora.

Não é fácil compreender que alguém que se dedicava às pesquisas em Ciências Físicas e Matemáticas e que sonhava em contribuir com as descobertas Matemáticas do século XIX, entrou para a política e conseguiu deixar de lado todos esses ideais. O princípio de exterioridade de Foucault (2002) possibilita entendermos essa situação, pois o discurso de Souzinha sobre o abandono de suas pesquisas na Física e Matemática ficou exposto nas entrelinhas, as suas justificativas estão relacionadas ao seu problema de saúde e falta de respostas da Comissão que avaliava suas Memórias.

Todas as especulações sobre Gomes de Souza encerram-se com a sua morte. A partir daí passam a existir outros discursos, cada um mostrando o que se conhecia dele, acrescentando algo a mais sobre o que ele poderia ter se tornado se tivesse vivido mais tempo. E assim vão se formando uma rede de novos discursos, alguns repetidos, outros que se conflitam, são exagerados, críticos, enfim produzidos por pessoas que, antes de tudo, admiravam-no e queriam exprimir muito respeito para compensar a sua perda.

Escrever sobre ele possibilitava torná-lo como exemplo para outras gerações e garantir sua valorização e o não esquecimento de alguém que trabalhou por seu país e merecia ser lembrado. Os escritores que conviveram com ele e os que não o conheceram pessoalmente não

conseguiram lidar com a perda de alguém tão jovem que despontava como promissor em várias áreas. E, escrever sobre ele, preenchia o vazio que deixou com a sua morte tão precoce.

Diversas intenções e objetivos estavam presentes nos textos escolhidos para este trabalho. O livro de Antônio Henriques Leal publicado no século XIX faz parte das publicações de quem quer prestar um reconhecimento ao amigo que morreu cedo, não tendo tempo de provar ao mundo que era um gênio, e se caracteriza com a forma literária presente naquele século. No mesmo período surge Frederico José Correia com suas críticas, com o intuito de travar uma luta contra Antônio Henriques Leal. Gomes de Souza e outros maranhenses biografados foram alvo de suas críticas, das quais algumas julgamos injustas. Certas críticas que ele fez a Souzinha têm um fundo de verdade, porém o exagero nas afirmações leva-nos a perceber algum tipo de descontentamento com grupos maranhenses, da qual ele não fazia parte.

José Teixeira de Oliveira, Malba Tahan, Humberto de Campos, João Bacelar Portela, Leopoldo Corrêa, Cícero Monteiro de Souza e Carlos Sanchez Fernandez escreveram seus textos no século XX, foram influenciados pelas ideias do Pantheon Maranhense e nenhum comenta ou apresenta críticas a Souzinha. Eles apenas descrevem vários fatos da vida e da obra de Souzinha, mas também expõem toda admiração e respeito que cada um tinha por ele. Do material analisado sobre as obras e a carreira política de Gomes de Souza, destacam-se como mais completos, no século XX, o livro de Leopoldo Corrêa e o de João Bacelar Portela.

Ubiratan D'Ambrosio, Cícero Monteiro de Souza, Sebastião Neto, Carlos Ociran Silva Nascimento publicaram seus textos no século XXI e apresentaram uma forma mais independente de tratar os fatos sobre a história de Souzinha. Mas, muitos dados são influenciados por Antônio Henriques Leal e João Bacelar Portela, outras fontes foram consultadas, novos focos e dados históricos foram pincelados nessas publicações, porém nenhum mencionou as críticas de Frederico José Correia. Ubiratan D'Ambrosio e Cícero Monteiro de Souza foram os que mais dados apresentaram para a história de Souzinha neste século.

Tecer elogios a Souzinha e reivindicar seu reconhecimento também contribuía para divulgar os interesses do Maranhão e suas características. Evidenciar a ideia de gênio que não teve tempo de mostrar todas as suas capacidades e exigir do Estado uma reparação pela falta de valorização de um talento grandioso como ele, isso fez com que percebessem as qualidades de Gomes de Souza, por isso lutaram e conseguiram fazer com que o Estado pagasse a publicação do livro *Mélanges de Calcul Intégral. Ouvrage Posthume,* porém não foram capazes de promover um estudo sobre os conceitos matemáticos descritos na obra.

Se antes da publicação fosse feito um exame minucioso sobre a Matemática presente em suas memórias e publicassem aquilo que de fato tinha passado por uma boa análise, Souzinha seria mais respeitado nas academias das Ciências Físicas e Matemáticas.

Apesar de não ter obtido prestígio na História da Matemática do século XIX, ele obteve respeito por ter sido um aluno aplicado nas Ciências Físicas e Matemáticas. Desenvolveu com êxito a função de funcionário do Império e de professor de Matemática, exerceu com zelo o cargo de deputado provincial, lutou contra os seus problemas de saúde e morreu antes de realizar todos os seus objetivos de vida.

Souzinha foi transformado em um homem eminente por seus amigos, conterrâneos e pela maioria das pessoas que escreveram sobre ele. Quanto mais lemos, escrevemos e falamos sobre ele, corremos o risco de esconder ou descortinar determinados aspectos intangíveis e intocáveis de sua trajetória.

A imagem de uma pessoa não se resume ao que a pessoa de fato produziu em termos de obras fantásticas ou perfeitas. Sua inserção na história depende de outros fatores que o julgamento posterior fica difícil de compreender completamente. Entram em cena fatos, concepções, crenças, prestígio, etc., ou seja, tudo aquilo que possa ter significado na memória histórica registrada por uma pessoa ou por um grupo determinado.

Como afirmou Bakhtin (2001), todo o respeito, prestígio e valor histórico, conquistados pelas pessoas, são provocados pelas ações vindas do campo social. Não é fácil compreendermos como são as pessoas humanas, suas reações e seus atos, essa compreensão está presente nas várias formas de interação e nos anseios culturais, sociais e históricos, ou seja, dependem do meio em que a pessoa vive.

Cada texto, momento histórico, grupo, local, foi responsável por construir uma imagem de Souzinha, registrando em sua história um modelo de pessoa diferenciada e sem tempo para provar todas as suas potencialidades. Tudo o que Gomes de Souza conquistou em vida o fez de maneira intensa, dedicando-se além de suas próprias forças, superando problemas, acreditando que era capaz de fazer algo distinto e conseguiu ter êxitos ainda em vida.

Foi possível percebermos, por meio dos discursos presentes nos textos analisados nesta tese, que Joaquim Gomes de Souza foi um líder nato, apaixonado pelo o que fazia e capaz de ter prestígio por onde passou. Por isso uma imagem que fica desse personagem é a de um homem digno de respeito e admiração por todas as coisas que realizou. Os trinta e cinco anos de vida, como professor de Matemática, funcionário público e parlamentar que conduziu a carreira de forma íntegra, foram suficientes para registrar seu nome na História brasileira.

A imagem construída sobre Souzinha, especialmente por Antônio Henriques Leal, de homem digno, político honesto, professor competente, pesquisador dedicado, funcionário cumpridor das atribuições de seu cargo e outros, indica a necessidade de produzir nas pessoas, que viessem a conhecer a sua história, o reconhecimento e a imitação de suas ações.

Os vários trabalhos biográficos apresentados na revista do IHGB e as várias publicações em forma de Panteões que ocorreram no século XIX influenciaram a escrita dos discursos na construção de uma imagem de Souzinha. O discurso de Antônio Henriques Leal que ficou registrado em seu livro foi muito contundente e foi capaz de se sobrepor ao discurso crítico de Frederico José Correia. Uma imagem de Souzinha criada por Leal continuou presente nas demais publicações, evidenciando um gênio que não teve tempo de realizar tudo o que poderia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bakhtin M (1995). Marxismo e filosofia da linguagem. Trad. Michel Lahud & Yara Frateschi Vieira. São Paulo: Hucitec.

_____ (1997). Estética da criação Verbal. Trad. Maria Ermantina Galvão G. Pereira. 2ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

_____ (1998). Questões de literatura e estética: a teoria do romance. 4. ed. Tradução de Aurora Fornoni Bernadini et al. São Paulo: Editora Unesp.

_____ (2001). O Freudismo. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Editora Perspectiva.

Blake A (1898). Diccionario Bibliographico Brazileiro. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional, v. 4.

Borralho JHP (2009). A Athenas equinocial: A fundação de um Maranhão no Império Brasileiro. Tese de doutorado. Universidade Federal Fluminense, Departamento de História: Niterói-RJ.

Campos H (1967). Souzinha, o matemático. In: Souzinha por Malba Tahan do livro Antologia da Matemática, volume 1, de Malba Tahan. Editora Saraiva, São Paulo, SP. Disponível em http://www.geocities.ws/ommalbatahan/spmt.html, acesso em 23 de outubro de 2010.

Corrêa L (1984). Biografia de Joaquim Gomes de Souza. Belo Horizonte-MG. Littera Maciel.

Correia FJ (1878). Um livro de crítica. Tip. do Frias: São Luís.

Cunha E (1999). À Margem da História. São Paulo: 1ª ed. Martins Fontes. (temas brasileiros).

D'Ambrósio U (2004). Joaquim Gomes de Souza, o "Souzinha" (1829-1864). In: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C. P.; SILVA, C. C.; Ferreira, J. M. H. (eds.). Filosofia e História da ciência no Cone Sul: 3º encontro. Campinas: AFHIC. Pp. 453-460. (ISBN 85-904198-

1-9. Disponível em: <http://ghtc.ifi.unicamp.br/AFHIC3/Trabalhos/61-Ubiratan-D-Ambrosio.pdf>. Acesso em: 15 outubro de 2009.

Del Priore M (1997). Documentos de história do Brasil: de Cabral aos anos 90. São Paulo: Scipione.

_____ (2009). Biografia: quando o indivíduo encontra a história. Topoi, v. 10, n. 19, jul.-dez, p. 7-16.

Del Priore M, Venancio R (2010). Uma breve história do Brasil. São Paulo: Editora Planeta do Brasil.

Enders A (2000). O Plutarco brasileiro. A produção dos vultos nacionais no Segundo Reinado. Revista Estudos Históricos, América do Norte, 14, jul. Disponível em: http://bibliotecadigital.fgv.br/ojs/index.php/reh/article/view/2114/1253. Acesso em: 15 de março, 2012.

Foucault M (2008). A arqueologia do saber. Trad. de Luiz Felipe Baeta Neves. 7ª ed. - Rio de Janeiro: Forense Universitária.

_____ (1979). Microfísica do Poder. Tradução, organização, introdução e Revisão Técnica de Roberto Machado. Rio de Janeiro: Graal.

_____ (1992). O que é um autor. Lisboa: Passagens.

_____ (1999). As palavras e as coisas: uma arqueologia das ciências humanas. Trad. de Salma Tannus Muchail. São Paulo: Martins Fontes.

_____ (2002). A ordem do discurso. Trad. de Edmundo Cordeiro com a ajuda para a parte inicial do António Bento. Petrópolis: Editora Vozes.

_____ (2005). Sobre as maneiras de escrever a história. In: MOTTA, Manoel de Barros (Org.) Michel Foucault. Arqueologia das ciências e história dos sistemas de pensamento. (Coleção Ditos & Escritos II). Rio de Janeiro: Forense Universitária.

Leal AH (1978). Pantheon Maranhense: Ensaios Biográficos dos Maranhenses ilustres já falecidos. Rio de Janeiro-RJ. Editorial Alhambra, 2ª ed. Tomos I e II.

Macedo JM (1876). Ano biographico brazileiro, I, II e III. Rio de Janeiro.

Martins RAF (2009). Atenienses e fluminenses: a invenção do cânone nacional. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Estudos da Linguagem. Campinas, SP: [s.n.].

Miguel A, Miorim MA (2004). História na Educação Matemática: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica.

Nascimento COS (2008). Alguns aspectos da obra Matemática de Joaquim Gomes de Souza. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP: [s.n.].

Neto S (2008). Joaquim Gomes de Souza e sua proposta de reforma do currículo da Escola Central. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Programa de Estudos Pós Graduados em História da Ciência. São Paulo, SP: [s.n.].

Oliveira JT (1948). O famoso Dr. Souzinha. Centro brasileiro de pesquisas físicas CBPF-CS-004/89, retirado do Suplemento de divulgação científica: Ciência para todos, do Jornal: A Manhã. Disponível em: http://cbpfindex.cbpf.br/publication_pdfs/Cs00489.2010_09_06_12_50_37.pdf. Acesso em: 25 de outubro de 2010.

Pollak M (1992). Memória e identidade social. Estudos Históricos, Rio de Janeiro, vol. 5, n. 10, p. 200-212.

Portela JB (1975). Gomes de Souza e Sua Obra. São Luís - MA. Editora da UFMA.

Santos PL (1880). O Pantheon fluminense. Esboços biographicos. Rio de Janeiro, Typ. G. Leuzinger & Filhos.

Silva IF (1884). Diccionario Bibliographico Portuguez tomo décimo segundo, quinto do suplemento J, Imprensa Nacional, Lisboa.

Silva JMP (1847). O Plutarco brazileiro. Rio de Janeiro, Laemmert.

Silva JNS (1862). Brasileiras celebres. Rio de Janeiro.

Souza JG (1848). O Modo de Indagar Novos Astros sem Auxilio das Observações Directas. Rio de Janeiro: Typographia de Teixeira & Cia., ii + 53 p. Tese de doutorado.

_____ (1850). Resolução das equações numéricas. Rio de Janeiro, In: Revista Guanabara, I (183-190, 229).

_____ (1854). Métodos gerais de integração e equação diferencial do som. Rio de Janeiro, In: Revista Guanabara, II (15-24, 61-64, 93-95, 251-256, 339-359).

_____ (1859). Anthologie Universelle: choix des meilleures poesies lyriques de diverses nations dans les langues originales. Leipzig: F. A. Brockhaus.

_____ (1882). Mélanges de Calcul Intégral. Ouvrage Posthume. Leipzig. Imprimiere de la F. A. Brockhaus.

Souza CM, Sanches FC (1999). Joaquim Gomes de Souza e as controvérsias sobre o uso das séries divergentes no século XIX. In: Ideação – Revista do núcleo interdisciplinar de estudos e pesquisas em Filosofia da Universidade Estadual de Feira de Santana. Feira de Santana: UEFS, NEF, III(3): 137-157.

Souza CM (2008). O Newton do Brasil: a biografia do cientista brasileiro Joaquim Gomes de Souza. Recife: Editora da UFRPE.

Viveiros J (1954). História do comércio do Maranhão: 1612 – 1895. São Luis, Associação Comercial do Maranhão.

Capítulo 2

Aplicações de funções e equações exponenciais e logarítmicas

Marco Aparecido Queiroz Duarte[1*]
Regina Litz Lamblém[1]

INTRODUÇÃO

No fim do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos (Lima, 2010). Por causa dessa demanda procurava-se uma maneira mais fácil de realizar os cálculos, o que originou o seguinte problema matemático da época: reduzir as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação em adição e subtração, consideradas mais simples.

Cientes desse problema, vários pessoas se ocupavam em resolvê-lo. Foi assim que John Napier (1550–1617), um nobre escocês, teólogo e matemático e, Jost Bürgi (1552– 1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos (Lima, 2010). O primeiro em 1614 e o segundo em 1620. Porém as tábuas de Napier tornaram-se mais conhecidas devido ao seu contato com professores universitários e às suas publicações. Mais tarde o conceito de logaritmo apresentado por Napier foi aperfeiçoadas pelo inglês Henry Briggs (1561–1630).

Com o advento do logaritmo podiam-se transformar o produto e a divisão, respectivamente em uma soma e em uma subtração, assim como uma potência e a radiciação em uma multiplicação e divisão, respectivamente, que por sua vez podem se transformarem em adições e subtrações por meio do logaritmo. Fato que facilitava em muito os cálculos, já que à época não existiam as calculadoras e computadores como atualmente.

Considerando essas informações históricas e o fato de atualmente podermos utilizar as calculadoras e os computadores para efetuarmos os mais diversos cálculos, podíamos pensar que os logaritmos perderam sua utilidade. Entretanto, veremos a partir desse trabalho que tanto o logaritmo quanto a sua inversa, a exponencial, tem lugar de destaque na modelagem e resolução de muitos problemas naturais e sociais da atualidade.

[1] Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul–UEMS–Unidade Universitária de Cassilândia. Rodovia MS 306.
* Autor de correspondência: marco@uems.br

Assim, neste capítulo apresentamos algumas das aplicações das funções e equações exponenciais e logarítmicas na modelagem de fenômenos naturais e sociais, bem como na resolução de problemas diversos. Para isso, damos continuidade ao texto com uma introdução sobre as funções e equações exponenciais e logarítmicas.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Ao elevar um número constante maior que 0 e diferente de 1 a um expoente que é uma variável obtemos uma representação da função exponencial. De outra maneira, podemos dizer que a função exponencial de base a é a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, representada algebricamente por

$$f(x) = a^x, \text{ com } 0 < a \neq 1.$$

Ou seja, a função exponencial possui domínio em $\mathbb{R}$ e imagem em $\mathbb{R}_+^*$ (conjunto dos números reais positivos e sem o zero).

A função exponencial pode ser representada por meio de gráficos, como na Figura 1.

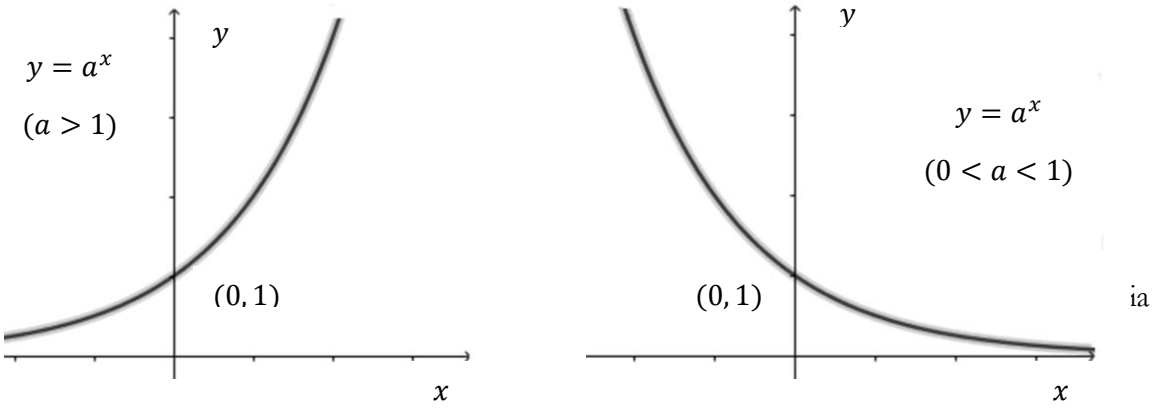


Figura 1. Representação gráfica de função exponencial. Fonte: Própria autoria.

A representação gráfica da função exponencial corta o eixo y no ponto de ordenada 1 e está acima do eixo x.

A função exponencial também pode ser representada por meio de tabelas com valores que descrevem uma relação funcional apresentando características exponenciais, como na Tabela 1, a seguir:

Tabela 1. Representação de uma função exponencial. Fonte: Própria autoria.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$1/8$	$1/4$	$1/2$	1	2	4	8

É comum encontrar na literatura a expressão "*cresceu exponencialmente*". Essa expressão vem do fato de que quando $a > 1$ a função exponencial cresce muito rápido. E quando $0 < a < 1$, a função exponencial é decrescente, como pode ser observado nos gráficos da Figura 1.

Considerando $a, b > 0$, então para todo x e y reais as funções exponenciais satisfazem às seguintes propriedades:

E$_1$) $a^x a^y = a^{x+y}$;

E$_2$) $(ab)^x = a^x b^y$;

E$_3$) $(a^x)^y = a^{xy}$;

E$_4$) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

E$_5$) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Além disso, a função exponencial cuja base é o número de Euler (o número irracional $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ que vale aproximadamente $2{,}718281828$) é conhecida como função exponencial natural, e é denotada por e^x ou $exp(x)$.

Em matemática, o termo função inversa é usado para descrever uma função que desfaz o efeito da outra, assim, se duas funções f e g satisfazem as condições $g(f(x)) = x$, para todo x no domínio de f e $f(g(y) = y$, para todo y no domínio de g, então f e g são funções inversas. Nesse sentido, podemos dizer que a função inversa da exponencial na base a é a função logarítmica de base a, representada algebricamente por

$$f(x) = log_a\, x, \text{ com } 0 < a \neq 1 \text{ e } x > 0.$$

Dessa forma, o domínio da função logarítmica é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais.

No decorrer deste capítulo quando não for mencionada a base a, significa que estamos usando a base 10, por exemplo, $f(x) = log\, x$ significa $f(x) = log_{10}\, x$.

Na Figura 2, a seguir, representamos a função logarítmica por meio de gráficos.

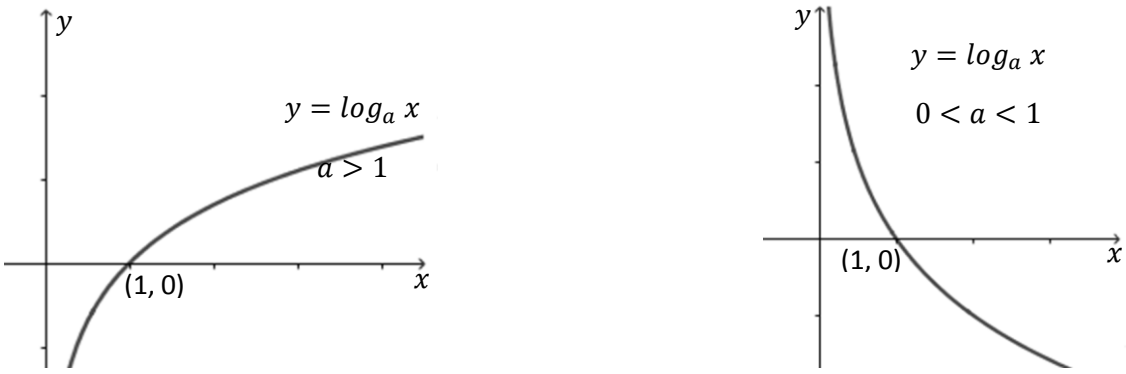


Figura 2. Representação gráfica de função logarítmica. Fonte: Própria autoria.

Conforme pode ser observado na Figura 2, as representações gráficas das funções logarítmicas ficam à direita do eixo y e cortam o eixo x no ponto de abscissa 1. Além disso, se $a > 1$ a função logarítmica é crescente e se $0 < a < 1$ ela é decrescente.

Considerando R e S reais positivos, as funções logarítmicas satisfazem às seguintes propriedades:

L1) $log_a 1 = 0$;

L2) $log_a a = 1$;

L3) $log_a (RS) = log_a R + log_a S$;

L4) $log_a \left(\frac{R}{S}\right) = log_a R - log_a S$;

L5) $log_a (R^c) = c\, log_a (R), c \in \mathbb{R}$.

Em geral, abreviamos $log_{10} x$ como $\log x$ e o logaritmo natural $log_e x$, sendo e o número de Euler, como $\ln x$. Tanto a exponencial natural quanto o logaritmo natural recebem essa nomenclatura "natural" devido às suas aplicações na natureza.

Outra propriedade importante é a de mudança de base. Considerando a, b e c números reais positivos com a e c diferentes de 1, então podemos mudar o logaritmo da base a para a base c, como segue: $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$. Essa propriedade é conhecida como mudança de base, e é bastante útil, pois permite converter o logaritmo de um número positivo, em certa base, para outro em base conveniente (Iezzi, Dolce e Murakami, 1993).

Um exemplo de situação que precisamos fazer a mudança de base aparece quando vamos utilizar uma calculadora para calcular um logaritmo que não é natural ou não está na base 10, pois as calculadoras científicas possuem a tecla log que é usada para calcular o logaritmo na

base 10 e a tecla ln que é usada para calcular o logaritmo natural. Assim, se queremos calcular $log_2 8$ por meio de uma calculadora científica, temos que mudar a base do logaritmo para 10 ($log_2 8 = \frac{log_{10} 8}{log_{10} 2}$) ou para e ($log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2}$) e encontrarmos o quociente utilizando as teclas log ou ln, respectivamente.

A seguir abordaremos sobre conhecimentos relacionados às equações exponenciais e logarítmicas.

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Equações exponenciais são equações que envolvem uma incógnita no expoente, por exemplo, $2^x = 8$ e $2^x = 3$.

Apresentaremos a seguir dois métodos fundamentais para resolver as equações exponenciais.

O primeiro é denominado método da redução a uma base comum e consiste em reduzir ambos os membros da equação, quando for possível, a potências de mesma base $a, 0 < a \neq 1$, pelo fato de potências iguais e de mesma base terem expoentes iguais, ou seja, $a^b = a^c$, então $b = c$, para $0 < a \neq 1$. Por exemplo, esse método pode ser aplicado no caso $2^x = 8$, pois $2^x = 2^3$, logo $x = 3$.

O segundo método é aplicado nos casos em que a redução de ambos os membros da equação a uma mesma base a, $0 < a \neq 1$, não pode ser feita aplicando as propriedades de potenciação, por isso, aplicamos a função logarítmica de base a em ambos os lados da equação, isto é, $a^x = b$, então $x = log_a\, b$, para $b > 0$. Por exemplo, esse método pode ser aplicado no caso $2^x = 3$, pois $log_2\, 2^x = log_2 3$, e conforme vimos na seção anterior, $log_2\, 2^x = x\, log_2\, 2$ e $log_2\, 2 = 1$, logo $x = log_2 3$.

As equações logarítmicas são equações em que a incógnita aparece em um logaritmo, por exemplo, $log_a\, f(x) = log_a\, g(x)$, $log_a f(x) = c$ ou $log_a\, f(x) + log_a\, g(x) = c$ com $c \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Utilizam-se métodos diferentes para encontrar a solução de cada uma dessas equações logarítmicas, por isso, dividiremos em três casos.

O primeiro envolve a igualdade entre dois logaritmos de mesma base, isto é, $log_a\, f(x) = log_a\, g(x), 0 < a \neq 1$. Nesse caso a solução é dada fazendo $f(x) = g(x) > 0$.

O segundo caso envolve a igualdade entre um logaritmo e um número, ou seja, $log_a f(x) = c$, com $c \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Nesse caso a solução é dada fazendo $f(x) = a^c$.

O terceiro caso envolve as equações que podemos resolver usando uma incógnita auxiliar. Por exemplo, $log_a^2\, f(x) + log_a\, f(x) = c$ com $c \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$. Nesse caso,

podemos usar uma incógnita auxiliar, ou seja, tomamos $y = log_a f(x)$ e obtemos $y^2 + y - c = 0$. Assim, basta resolver a equação polinomial do segundo grau $y^2 + y - c = 0$ e substituir os valores y_1 e y_2 para encontrados a equação $y = log_a f(x)$ para obtermos o conjunto solução $\{a^{y_1} = f(x),\ a^{y_2} = f(x)\}$.

APLICAÇÕES

Logaritmos e exponenciais estão em várias aplicações, às vezes se relacionando entre si. Conforme vimos, por exemplo, a equação $3^x = 7$ não pode ser resolvida pela redução, por meio da decomposição em fatores primos, dos números 3 e 7 a uma mesma base inteira. Porém, podemos usar a propriedade da igualdade de logaritmos em uma mesma base e escrever $log3^x = log7$. Depois, pela propriedade do logaritmo da potência, temos $xlog3 = log7$. E, portanto, a solução da equação é $x = \frac{log7}{log3}$.

A equação logarítmica $log(x + 1) = 3$ é resolvida diretamente da definição de logaritmo. Mas, também pode ser resolvida pela igualdade de exponenciais, da seguinte forma: $10^{log(x+1)} = 10^3$, o que leva a $x + 1 = 1000$. Concluindo que $x = 999$.

As resoluções das equações anteriores, por meio dos respectivos usos de logaritmos e exponenciais, só foram possíveis pelo fato das funções exponenciais e logarítmicas serem inversas uma das outras.

Nesta seção apresentamos algumas aplicações de exponenciais e logaritmos em problemas que nem sempre os terão em suas modelagens, mas que usam um ou outro em suas resoluções.

Juros Compostos

Se um capital C é aplicado a uma taxa de juros i por um período de um mês, então o montante M, ao final desse mês será $M = C.\left(1 + {}^{i}/_{100}\right)$. Se a aplicação for feita por dois meses, então o montante final será $M = C.\left(1 + {}^{i}/_{100}\right).\left(1 + {}^{i}/_{100}\right)$. Assim, se tal aplicação se der por um período de n meses, ao final do n-ésimo mês, teremos

$$M = C.\underbrace{\left(1 + {}^{i}/_{100}\right).\left(1 + {}^{i}/_{100}\right)\ldots..\left(1 + {}^{i}/_{100}\right)}_{n\ vezes}$$

Assim, podemos concluir que o montante M, dados o capital C investido a uma taxa de juros i por um número n de períodos (dias, meses, anos, etc.) é dado pela expressão

$$M(n) = C.\left(1 + {}^{i}/_{100}\right)^n,$$

que nada mais é que uma equação exponencial.

Exemplo 1: Oitocentos reais são aplicados a juros compostos em um banco a uma taxa mensal de 1,5% ao mês. Determine:

a) qual o montante em 4 meses;
b) em aproximadamente quantos meses o capital dobrará de valor.

Solução: Primeiro, verificamos que esse é um problema de juros compostos onde o capital inicial C é de R$ 800,00, a taxa de juros é $i = 1{,}5\%$ e o período n é dado em meses. Assim,

$$M(n) = 800.\left(1 + \frac{1{,}5}{100}\right)^n = 800.(1{,}015)^n.$$

a) Temos que determinar o montante quando $n = 4$. Logo,

$$M(4) = 800.(1{,}015)^4 = 849{,}09.$$

Portanto, em quatro meses o montante será de R$ 849,09.

b) Agora, precisamos dizer em quanto tempo o capital dobrará de valor, ou seja, em quanto tempo devemos deixar aplicado o dinheiro até que ela atinja R$ 1600,00. Assim, temos que determinar n para o qual se terá $M = 1600$. Teremos então que resolver a equação

$$800.(1{,}015)^n = 1600.$$

Que implica

$$(1{,}015)^n = 2.$$

Aplicando um logaritmo de mesma base em ambos os lados, teremos

$$log(1{,}015)^n = log2,$$

implicando,

$$nlog(1{,}015) = log2.$$

Que equivale a

$$n = \frac{log2}{log(1{,}015)}.$$

Como $log2 \cong 0{,}301$ e $log1{,}015 \cong 0{,}0065$ então concluímos que $n \cong 46$. Portanto, em aproximadamente 46 meses o capital dobrará de valor.

Ao resolver o exemplo anterior, no item (a), para se descobrir o montante em 4 meses, calcula-se direto o valor da função exponencial para $n = 4$; no item (b), a aplicação do logaritmo é necessária para se chegar ao tempo que o capital levará para ser dobrado.

Dinâmica Populacional

Um dos modelos mais clássicos de cálculo de crescimento de uma população é o modelo de Malthus (Tomas Robert Malthus (1766–1834)). Nele há a afirmação de que a taxa de variação de uma determinada população em relação ao tempo, denotada por $\frac{dP}{dt}$, é diretamente proporcional à população P presente. Isto significa que se $P = P(t)$ então

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

sendo que o símbolo $\frac{dP}{dt}$ representa a derivada da função P em relação ao tempo t (Guidorizzi, 2018).

A equação anterior é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem (Zill e Cullen, 2001), que pode ser reescrita como

$$\frac{dP}{P} = kdt,$$

cuja resolução pode ser data por integração direta em relação a P e a t,

$$\int \frac{dP}{P} = \int kdt + c_1,$$

que tem como resultado

$$lnP = kt + c_1.$$

Porém, queremos encontrar uma expressão para $P(t)$. Isso conseguiremos se aplicarmos a função exponencial a ambos os lados da equação anterior:

$$e^{lnP} = e^{kt+c_1}.$$

Assim, por propriedades do logaritmo e da exponencial e fazendo $c = e^{c_1}$, temos:

$$P(t) = ce^{kt}.$$

No instante $t = 0$ teremos $P(0) = P_0$ que é a população inicial. Fazendo $t = 0$ e $P(t) = P_0$ na equação anterior, tem-se a que população em um instante t é dada por

$$P(t) = P_0e^{kt},$$

que é uma função exponencial.

Exemplo 2: Observando, em um instante inicial, uma população de cisnes, foram contados 85 elementos. 6 meses depois essa população era de 102 cisnes. Considerando que tal população é regida pelo modelo de Malthus, determine quantos indivíduos ela terá em 18 meses a partir da primeira observação.

Solução: Considerando que a primeira observação se deu no instante $t = 0$ mês, então $P_0 = 85$. Logo,

$$P(t) = 85e^{kt}.$$

Precisamos agora obter o valor k para completar os parâmetros da função $P(t)$. Para isso usaremos a informação $P(6) = 102$. Assim,

$108 = 85e^{k.6}$ ou $e^{6k} = \frac{102}{85}$. Há então a necessidade da aplicação do logaritmo natural em ambos os lados, resultando em $6k = ln\left(\frac{102}{85}\right)$ ou $k = ln\left(\frac{102}{85}\right)/6$ e, portanto, $k = 0{,}030386\ldots \cong 0{,}03$. Dessa forma, concluímos que

$$P(t) = 85e^{0{,}03t}.$$

Por fim, para sabermos a população em 18 meses, basta calcularmos $P(18)$,

$$P(18) = 85e^{0{,}03.18} = 85e^{0{,}54} \cong 146.$$

Portanto, em 18 meses a população será de 146 cisnes.

O modelo de Malthus diz que a população tem crescimento exponencial, por isso, ela cresce ou decresce muito rápido com o passar do tempo. Assim, esse modelo não é aplicável a todas as populações, principalmente por não considerar a taxa de mortalidade e a competição entre espécies. Mas, se adequa a populações pequenas ou populações que necessitem de análises em curto prazo. Por envolver a derivada $\frac{dP}{dt}$ de uma função em sua modelagem (Guidorizzi, 2018), o modelo de Malthus é classificado como modelo diferencial.

Lei de Esfriamento de Newton

Outro modelo diferencial semelhante ao de Malthus é a lei de esfriamento de Newton, (Zill; Cullen, 2001), que diz que a taxa de esfriamento de um corpo em função do tempo $\frac{dT}{dt}$ é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo T e a temperatura do meio ambiente T_m, isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m).$$

A equação anterior pode ser resolvida de forma análoga à do modelo de Malthus, produzindo a solução

$$T(t) = T_m + ce^{kt}.$$

E considerando que no primeiro instante de contato com o ambiente, $t = 0$, a temperatura do corpo seja $T(0) = T_0$, teremos $c = T_0 - T_m$ e, consequentemente,

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}.$$

Assim, a resolução de problemas de esfriamento de corpos envolverão sempre uma função exponencial, ou uma equação exponencial cuja solução pode passar também por uma equação logarítmica.

Existem ainda outras aplicações relativas a fenômenos naturais que resultam em modelos semelhantes aos dois citados anteriormente, dentre eles podemos citar o cálculo da meia vida de um fármaco, cálculo de reações químicas entre substâncias, cronologia do carbono C-14 e cálculo da pressão atmosférica em uma região (Zill; Cullen, 2001; Boyce; Diprima, 2015, Morais Filho; Oliveira, 2014). A modelagem dos fenômenos citados sempre resultará em funções exponenciais ou logarítmicas.

Escala Richter

A Escala Richter, também conhecida como escala de magnitude local, é um sistema usado para medir a intensidade de um terremoto conforme a energia por ele desprendida (Morais Filho, Oliveira, 2014). Elaborada por Charles Francis Richter (1900-1985) com a colaboração de Beno Gutenberg (1889-1960), seu limite, teoricamente, não existe, mas é comum a convenção de que não haja terremotos que ultrapassem a magnitude 10.

Para se calcular a magnitude M de um terremoto, conforme a escala Richter, são usados valores medidos por meio de registros gráficos de um sismógrafo, obtendo-se a equação a seguir.

$$M = logA + 3\log(8\Delta t) - 2{,}92 = log\left(\frac{A\Delta t^3}{1{,}62}\right)$$

onde:

A = amplitude das ondas sísmicas, em milímetros, medida diretamente no sismograma.

Δt = tempo, em segundos, desde o início do trem de ondas primárias até à chegada das ondas secundárias.

M = magnitude arbitrária, mas constante, aplicável a sismos que libertem a mesma quantidade de energia.

A Escala Richter é, por definição, uma escala logarítmica**.** O uso de escalas logarítmicas é comum quando tem valores muito grandes para se expressar, pois, como o logaritmo de um número é sempre menor do que ele, isso faz com que um número grande seja representado na

escala logarítmica por um valor bem menor ou, na maioria das vezes, muito menor. No caso de logaritmos na base 10, esse número é representado apenas pelo expoente de sua potência de base 10. Por exemplo, na escala Richter, um tremor de intensidade cinco é 10 vezes mais forte que um de escala quatro e, consequentemente, 100 vezes mais forte que um de nível três.

Uma forma mais simples para o cálculo da magnitude M é considerar que M é a diferença entre o logaritmo da amplitude máxima A da onda gerada pelo terremoto e o logaritmo da amplitude padrão A_0, isto é,

$$M = logA - logA_0.$$

Não se deve confundir a magnitude com a intensidade de um terremoto. Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. Enquanto que intensidade sísmica é uma medida qualitativa que descreve os efeitos produzidos pelos terremotos em locais da superfície terrestre. A classificação da intensidade sísmica é feita a partir da observação "in loco" dos danos ocasionados nas construções, pessoas ou meio ambiente. Porém, tanto magnitude quanto intensidade estão relacionadas à força do terremoto. Por isso, quanto maior elas forem maiores são os estragos causados.

A intensidade, que muitas vezes é informada no lugar da magnitude, é dada por

$$I = \frac{2}{3} log \frac{E}{E_0},$$

sendo E a energia liberada pelo terremoto em kW (quilowatt) e $E_0 = 7 \times 10^{-3}$. Pode-se ainda relacionar a energia E com a magnitude M por (Morais Filho; Oliveira, 2014)

$$logE = 11{,}8 + 1{,}5M.$$

Exemplo 3: Determine a energia liberada por um terremoto de magnitude 4,7 na escala Richter.

Solução: Como $M = 4{,}7$, temos

$$logE = 11{,}8 + 1{,}5 \times 4{,}7 \Leftrightarrow logE = 18{,}85 \Leftrightarrow E = 10^{18{,}85}.$$

Portanto, a energia liberada por esse terremoto $E = 10^{18{,}85}$ kW.

A solução desse simples exemplo mostra o quanto é importante o uso do logaritmo para se expressar a magnitude de um terremoto, pois se fizermos $18{,}85 \cong 19$, para expressar a energia teríamos que escrever o número 1 seguido de 19 zeros, algo muito mais difícil de expressar e de ler do que o simples valor $4{,}7$.

A escala Richter não é a única a ser usada para a medição de terremotos. Outra escala muito usada também é a de Mercalli, devida ao vulcanólogo e sismologista italiano Giuseppe Mercalli (1850-1914). Atualmente, a escala mais usada para a medição de sismos é de Mercalli Modificada (MM). A MM indica o grau de intensidade sísmica de um terremoto e varia de 1 até 12 (NIDM, 2014). Além disso, estudos mais atuais trabalham em formas diferentes de se medir e prever a magnitude de terremotos com mais exatidão (Denolle, *et al.*, 2018; Herp, 2019).

Potenciais Hidrogeniônico e Hidroxiliônico

O potencial (ou potência) hidrogeniônico, pH, de uma solução se refere a concentração de H^+ (ou H_3O^+) nesta solução(Baccan et al., 2004; Harris, 2012). O pH é calculado pela seguinte fórmula:

$$pH = -logH^+.$$

O potencial Hidroxiliônico, pOH, se refere a concentração de OH^- numa solução e é calculado por

$$pOH = -logH^-.$$

Soluções que têm $pH = pOH$ são consideradas neutras. Quando $pH < pOH$, a solução é ácida e se $pH > pOH$ temos uma solução básica. Para qualquer solução, tem-se $pH + pOH = 14$. Assim, para soluções básicas tem-se $pH = pOH = 7$. Dessa forma, não é necessário calcular pH e pOH para classificar uma substância como neutra, ácida ou básica, basta calcular um dos dois. Geralmente, se usa o pH. E a substância será classificada como neutra se $pH = 7$, ácida se $pH < 7$ e básica se $pH > 7$.

Exemplo 4: Uma substância com concentração de H^+ igual a 10^{-5} mol/L (moles por litro) é considerada ácida.

De fato,

$$pH = -log10^{-5} \Leftrightarrow pH = -(-5)log10 \Leftrightarrow pH = 5.$$

Portanto, a substância é ácida, pois $pH = 5 < 7$.

Nível de Intensidade Sonora

A Intensidade sonora, também chamada de volume ou pressão sonora, diz respeito a percepção da amplitude de uma onda sonora (Sears, Zemansky, Young, 1994; Morais Filho, Oliveira, 2014). A percepção da intensidade pelo ouvido humano não é linear, é logarítmica. Ou

seja, o ouvido só percebe variações de intensidade como lineares, se as amplitudes variarem exponencialmente. Assim, para facilitar a medição da pressão sonora em relação à percepção auditiva, utiliza-se uma unidade logarítmica: o decibel (dB), em homenagem ao físico escocês Alexandrer Graham Bell (1847-1922).

O nível de intensidade sonora NIS, como dito no parágrafo anterior, é dado em escala logarítmica e definido por

$$NIS = 10log\frac{I}{I_0},$$

sendo que I é a intensidade do som em W/m^2 (Watt por metro quadrado) e I_0 é um valor de referência, normalmente é adotado $10^{-12}\ W/m^2$ que é a menor intensidade sonora audível.

Exemplo 5: Numa competição de som automotivo, mediu-se a intensidade do som emitido pelos autofalantes instalados em um carro, obtendo $I = 10^2$. Qual o volume do som emitido?

Solução: Considerando $I_0 = 10^{-12}$ tem-se

$$NIS = 10log\frac{10^2}{10^{-12}} \Leftrightarrow 10log10^{14} = 10 \times 14 = 140.$$

Portanto, o volume do som emitido é 140 dB.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, vimos que os logaritmos surgiram a partir de problemas vividos no século XVI, como a necessidade de resolver operações consideradas difíceis e que demandavam muito tempo. Essas circunstâncias abriram caminho para que o conceito de funções logarítmicas e sua inversa, a função exponencial, se expandissem e fossem usadas para resolver vários problemas que emergiram no decorrer do tempo. Por isso, procuramos mostrar como as funções exponenciais e logarítmica estão associadas a várias aplicações e informações que fazem parte de nosso cotidiano. Para isso, primeiro definimos tais funções e apresentamos suas principais propriedades, seguidos de uma seção com aplicações.

Pudemos ver que tais funções aparecem em aplicações envolvendo fenômenos naturais e sociais. Por serem inversa uma da outra, tais funções se complementam em tais aplicações.

No que tange ao uso da escala logarítmica, enfatizamos que essa escala torna fácil e acessível a apresentação de dados que envolvem valores muito altos. Pois, esses valores são representados apenas pelos expoentes da potência da base logarítmica que representam.

Por fim, salientamos que apenas algumas aplicações envolvendo exponenciais e logaritmos foram apresentadas neste trabalho. Pois, trata-se de um assunto muito amplo com aplicações que surgem dia após dia.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Baccan N, Andrade JC, Godinho OES, Barone JS (2001). Química Analítica, Quantitativa e Elementar. 3. ed. Editora: Edgard Blucher, São Paulo. 324p.

Boyce WE, Diprima, RC (2015). Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 10. ed. Editora: LTC, Rio de Janeiro. 680p.

Denolle MA, Boué P, Hirata N, Beroza GC (2018). Strong Shaking Predicted in Tokyo Froman Expected M7+ Itoigawa-Shizuoka Earthquake. Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 123(5): 3968-3992.

Guidorizzi, HL (2018) . Um Curso de Cálculo. 6. ed. vol. 1. Editora: LTC, Rio de Janeiro . 580p.

Harris DC (2012). Análise Química Quantitativa. 8. Ed. Editora LTC, Rio de Janeiro. 966p.

HERP - The Headquarters for Earthquake Research Promotion – (2019) - Understanding Earthquakes. Disponível em: https://www.jishin.go.jp/main/index_fk-e.html. Acesso em 18/11/2019.

Iezzi G, Dolce O, Murakami, C (1993). Fundamentos de Matemática. 8 ed. vol.2. Editora: Atual, São Paulo. 72p.

Lima EL (2010). Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática, 4. ed. Editora: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio de Janeiro. 148p.

Morais Filho DG, Oliveira MNA (2014), Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio, In. III Colóquio de Matemática da Região Nordeste, Ilhéus, 29 de setembro a 4 de outubro de 2014.

NIDM – National Institute of Disaster Management – (2014) – Earthquake Measurements. Disponível em: https://nidm.gov.in/easindia2014/err/pdf/earthquake/earthquakes_measurement.pdf. Acesso em 18/11/2019.

Sears F, Zemansky MW, Young HD (1994). Física – volume 2 - Mecânica dos fluidos, calor, movimento ondulatório. 2. Ed. Editora LTC, Rio de Janeiro.

Zill DG, Cullen MR (2001). Equações Diferenciais. 3 ed. vol. 1. Editora: Pearson, São Paulo. 473p.

Capítulo 3

Ensino de matemática financeira no curso de licenciatura em matemática e bacharelado em ciências contábeis: reflexões dos impactos no processo de ensino/aprendizagem e/ou no mercado de trabalho

Julio Cezar Uzinski[1*]
Lucas Fernando Soares de Oliveira[2]
Luziane Da Silva Almeida[3]

INTRODUÇÃO

As reflexões apresentadas nesse artigo, sobre ensino/aprendizagem de matemática financeira e, expectativas de aplicação a problemas reais tiveram origem durante a disciplina de matemática financeira nos cursos de bacharelado em Ciências Contábeis e Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, Campus de Sinop – MT no primeiro semestre de 2018. Essa disciplina foi lecionada por meio de diferentes metodologias, de acordo com cada tópico em questão em ambos os cursos, de forma simultânea e, na parte final os alunos de matemática participaram do processo de ensino no curso de Ciências Contábeis. O interesse na disciplina por parte dos alunos de ambos os cursos se dá por razões diferentes e a facilidade de aprender os conceitos se dá em níveis diferentes por razões diversas, entre as quais, a disciplina no curso de Matemática faz parte do último semestre, e em Ciências Contábeis faz parte do segundo semestre. Os fatores de interesse e facilidade em aprender, motivaram uma investigação que tem por objetivo adequar a ementa, pré-requisitos, recursos, metodologias e outros. Para atingir o objetivo principal, que é a elaboração desse artigo que divulga essas

[1] Rua das Gaivotas, 325, Sinop-MT.
[2] Avenida dos Ingás, 3410, Setor Comercial. Sinot-MT.
[3] Rua Bolanha, 1216, Florença. Sinop-MT.
* Autor de correspondência: uzinski.jc@gmail.com

reflexões e/ou considerações, o professor da disciplina juntamente com os acadêmicos da disciplina em questão no curso de Matemática incluíram nas aulas discussões sobre o ensino de matemática financeira e ensino em geral, e organizaram aulas com metodologias alternativas no curso de Ciências Contábeis. A principal reflexão que é apontada por este estudo de caso é que, a aplicação de diferentes metodologias de ensino e de avaliação de acordo com o conteúdo programático e os objetivos, podem levar a um aumento de interesse e de resultados práticos em diferentes turmas e em diferentes níveis. Para demonstrar que essa possibilidade é real apresentamos os resultados de forma quantitativa, porém com as análises qualitativas, e discutimos as possibilidades e metodologias em estudo.

O objetivo central dessa pesquisa é refletir sobre diferentes metodologias para o ensino e avaliação numa mesma turma de matemática e sobre a alteração de metodologias no decorrer da disciplina. Especificamente, o estudo foi aplicado na disciplina de matemática financeira. O curso de matemática financeira em Ciências Contábeis e Matemática tem ementas e cargas horárias pré-estabelecidas, mas as avaliações e metodologia de ensino são de responsabilidade do professor. Nesse sentido, há espaço para a discussão em busca de melhorias no aproveitamento dos alunos.

No caso do curso de Licenciatura em Matemática, essa disciplina é bem recebida pelos alunos, sendo escolhida dentro da opção de eletiva, principalmente pelo fato de se relacionarem com a necessidade de ensinar tais conteúdos. Por outro lado, no curso de Bacharelado em Ciências Contábeis, a mesma disciplina, embora muito útil ao profissional da área, é vista com desconfiança e como um obstáculo a ser vencido no caminho da obtenção do diploma. De fato, existe uma rejeição em relação à matemática por parte dos alunos (Tatto e Scapin, 2004).

A rejeição e incerteza por parte dos acadêmicos em relação a matemática financeira no curso de Ciências Contábeis, sabendo que é algo extremamente útil em suas vidas, justificou e motivou a elaboração de um plano de ensino específico para levar a melhores resultados e com a pretensão de fazê-los mais amigáveis à tal disciplina. Ao mesmo passo que, na turma de Licenciatura em Matemática, se deu um novo desafio: melhorar os índices de uma turma plenamente satisfatória e levá-los a campo para que eles mesmos pudessem ensinar aos colegas da outra turma. O plano de ensino nas duas turmas, embora distintos, envolviam metodologias diferentes durante momentos diferentes da disciplina, assim poderia se refletir sobre as metodologias e também sobre a prática de mudança das mesmas.

A primeira metodologia foi idêntica em ambas as turmas: ensino tradicional com aulas expositivas com resolução de exercícios e avaliação em forma de prova individual sem consulta. Para uma comparação entre metodologias, uma boa leitura é Paiva et al. (2016). Dessa forma,

pôde se extrair algumas conclusões preliminares sobre ambas as turmas e traçar um plano para cada uma delas. Conforme Quadros 1 e 2, enquanto as notas da turma de Matemática quase foram máximas, na turma de Ciências Contábeis, as notas foram abaixo da média para aprovação.

A segunda metodologia de ensino e avaliação usada foi o *Team Based learning* (TBL), motivado pelo fato de que haviam muitas notas acima e abaixo da média para aprovação ao mesmo tempo, nesse sentido o trabalho em grupo poderia ser útil e ainda assim manter o caráter individual das avaliações. O TBL é uma metodologia ativa em que o aluno busca o conhecimento, há um esforço conjunto e também uma parte individual, para que o mesmo não se apoie completamente no grupo (Gonçalves *et al.*, 2018; Silva, 2018; Oliveira *et al.*, 2018; Marques, 2019;).

A intenção do uso da metodologia TBL foi aproximar os alunos mais interessados dos demais, propiciando um ambiente competitivo entre as equipes, fazendo com que a produção individual fosse mantida, porém buscando melhorias em relação às notas. Esperava-se desde o início que essa metodologia trouxesse bons resultados na turma de Ciências contábeis, mas seria uma incógnita na turma de Matemática.

Para analisar a melhoria dos alunos, em ambas as turmas, no terceiro momento voltou-se com a avaliação por meio de prova, porém aliada a atividades complementares. As atividades foram diferentes de uma turma para a outra. Na turma de matemática, foram apresentações em forma de aula e no outro curso foram exercícios práticos de matemática financeira. A resolução de problemas aplicados, no caso de uma turma e, o exercício do magistério na outra, teve como objetivo trazer um clima amistoso entre a disciplina e os alunos (Diesel *et al.*, 2017; Roman *et al.*, 2017).

Embora aplicadas de maneiras diferentes às duas turmas, a última parte da disciplina, foi focada no uso de tecnologias no ensino, tanto o uso de planilhas eletrônicas quanto o uso de calculadores específicos para matemática financeira. A turma de Matemática teve que aprender como utilizar esses recursos e depois ensinar os alunos de Ciências Contábeis. Esses últimos, tiveram de aprender a usar os recursos e depois resolver problemas da disciplina com os mesmos.

O uso de tecnologias na educação, no processo de aprendizagem, no processo avaliativo, já não é mais novidade, porém continua sendo um recurso imprescindível, principalmente quando se deseja que o conhecimento adquirido tenha validade na vida profissional pós universidade. Pode-se recomendar uma lista extensa de textos sobre o assunto e ainda será possível acrescentar aplicativos, *softwares*, cursos, vídeos, livros digitais, entre outros. Quando se

trata de tecnologia de informação um mundo novo se abre diante dos alunos (Tori, 2018; Figueiredo *et al.*, 2015; Gadanidis *et al.*, 2016).

MATERIAL E MÉTODOS

Considera-se a turma de matemática financeira do curso de matemática a turma A e a turma de matemática financeira do curso de ciências contábeis a turma B. Em ambas turmas a primeira parte da disciplina consistiu de aulas expositivas com resolução de exercícios de diferentes livros sobre conceitos introdutórios de matemática, juros e descontos simples e/ou compostos. Desta maneira, a primeira prova em ambas turmas teve uma função diagnóstica, além de avaliativa, para decidir novas metodologias e confirmar se o aproveitamento na turma A era melhor que na turma B.

Na turma A, a média, moda e desvio padrão das notas foram, respectivamente: 9,93, 9,9 e 0,057. Isto é, a média foi muito próxima da nota máxima e a maioria das notas foi apenas um décimo abaixo, com uma variância insignificante. Portanto, o aproveitamento foi muito alto.

Na turma B, a moda foi a nota máxima, mas isso não significa que o aproveitamento foi alto. A média foi de 6,65 (nota suficiente para aprovação), mas como o desvio padrão foi de 2,9, tem-se a menor nota sendo dois. Pode-se classificar o aproveitamento, nesse caso, como regular. Cabe ressaltar que na turma de ciências contábeis, há onze vezes mais alunos que na turma A.

Como a prova não valorizou o tema descontos compostos da mesma maneira que cobrou os demais temas propostos, juntou-se esse tema aos estudos de taxas para um trabalho feito sob a metodologia TBL. Novamente o desempenho de ambas as turmas foi comparado, ainda de forma separada.

Usando a metodologia TBL a turma A manteve o bom desempenho. A média aritmética simples foi 9,67, o desvio padrão 0,57e a moda foi a nota máxima. Pode-se afirmar sem prejuízos que houve uma melhora, porém insignificante, isto é, dentro de uma margem específica a ser considerada.

Ao contrário da turma de matemática, a turma B, surpreendeu com uma melhora muito significativa. A média, por exemplo, passou de 6,65 para 9,33, e o desvio padrão caiu de 2,9 para 1,53. É importante ressaltar que se excluída a nota de um único aluno que tirou apenas um ponto, o desvio padrão seria de apenas 0,5.

A partir desse momento, decidiu-se tomar rumos diferentes nas duas turmas. O conteúdo para a terceira nota foi amortização de dívidas. No curso de matemática cada aluno ministrou uma aula sobre um determinado sistema de amortização, valendo 60% da nota. O

restante dessa nota foi obtido por uma prova. Na turma de Ciências Contábeis, as aulas foram expositivas e a avaliação por meio de uma prova com consulta e entrega de planilhas em formato eletrônico. A ideia nesse último caso foi verificar se esses alunos também poderiam mostrar um bom desempenho com uma metodologia já testada, porém, com ligeiras alterações, como por exemplo, o trabalho com tabelas e o uso de planilhas eletrônicas durante as aulas.

A terceira nota abre uma discussão interessante, pois não se trata mais da metodologia TBL, mas de uma mescla de atividades e avaliações, que podem ter influência da metodologia já citada em nível significante ou não. Nota-se o caráter de melhora em relação a prova e a metodologia tradicional e não há uma disparidade como foi da primeira para a segunda nota. Esse fenômeno merece a devida atenção.

Enquanto a turma A teve, média, moda e desvio padrão, respectivamente, 10, 10 e 0, o que é ideal para alunos com o objetivo de serem docentes dentro da metodologia aplicada, na turma B, se obteve média, moda e desvio padrão respectivos, 8,83, 10 e 1,99. Fazendo uma análise da turma de matemática financeira do curso de ciências contábeis e levando-se em consideração a metodologia e objetivos propostos, percebemos que a média é altamente satisfatória, e que a nota que mais se repetiu foi a nota máxima, e o desvio padrão ficou ligeiramente abaixo de 2, o que é uma melhora se comparado com a primeira avaliação, mas uma piora se comparado com a segunda.

A última nota da turma A se deu por meio de oficinas apresentando métodos de matemática financeira e o uso de calculadora científica para o ensino da referida disciplina, enquanto que para a turma B essa nota se deu por meio da resolução de atividades usando a calculadora em questão, isso com o auxílio dos alunos da turma A. A parte conceitual das atividades diziam respeito a todo o conteúdo trabalhado na disciplina, aqueles que eles obtiveram boas notas e também aqueles onde a média foi a mais baixa, porém agora, com o uso das tecnologias de planilhas eletrônicas e calculadora.

Em ambas turmas estudadas os resultados foram plenamente satisfatórios, de forma que, todos os participantes obtiveram nota máxima na quarta nota. Um fator importante a ser observado é a motivação de ambas as turmas, esse ambiente é criado de acordo com os objetivos dos alunos, em uma turma o objetivo é aprender para ensinar e na outra aprender para aplicar em atividades práticas do trabalho. Aparentemente, eles sentem que essas aulas serão de uso prático em suas vidas, e se esforçam mais para aprender. Por outo lado, as notas em ascendência os motivam a obter melhor desempenho na disciplina. O resultado é visto nas tabelas a seguir.

Tabela 1. Medidas de tendência central e dispersão das notas e tipos de avaliações da turma de matemática financeira do curso de Matemática (8º semestre). Fonte: Elaborado pelos próprios autores.

Turma A Matemática	**1ª nota**	**2ª nota**	**3ª nota**	**4ª nota**	**Media**
Avaliação	Prova	TBL	Aula e Prova	Oficina	
Média	9,33	9,67	10	10	9,9
Moda	9,9	10	10	10	9,975
Desvio Padrão	0,057	0,57	0	0	0,13

Tabela 2. Medidas de tendência central e dispersão das notas e tipos de avaliações da turma de matemática financeira do curso de Ciências Contábeis (2º semestre). Fonte: Elaborado pelos próprios autores.

Turma B Contábeis	**1ª nota**	**2ª nota**	**3ª nota**	**4ª nota**	**Média**
Avaliação	Prova	TBL	Prova e atividades	Atividades em grupo	
Média	6,65	9,33	8,83	10	8,33
Moda	10	10	10	10	9,91
Desvio Padrão	2,9	1,53	1,99	0	2

Nas Tabelas 1 e 2 a última coluna é referente a média final, sendo assim, a média das médias, a moda das médias e o desvio padrão das médias finais. É possível identificar que os resultados são satisfatórios em todas as turmas. Na turma A não é possível identificar uma melhora significativa com a alteração de metodologias, porém, foi notado no decorrer do semestre um envolvimento cada vez mais entusiasmado dos alunos. Por outro lado, na turma B, o crescimento é visível com as alterações das metodologias e com a satisfação das próprias notas alcançadas.

Um aspecto notável é que para que os índices usados melhorassem, alunos que na primeira avaliação demonstraram déficit de aprendizado, melhoraram nos mesmos conteúdos quando sob nova metodologia. Por exemplo, na primeira avaliação foi trabalhado os conceitos de juros e descontos, esses mesmos conceitos foram trabalhados na última avaliação, porém usando tecnologias que farão parte da vida profissional dos mesmos. Em contrapartida, os alunos de licenciatura também puderam aprender a utilizar as calculadoras financeiras, e o mais importante, aprenderam ensinando.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o intuito de entender como se deu o desenvolvimento em ambas turmas, foram elaborados dois gráficos que priorizam a visualização do crescimento ou decrescimento das médias e desvio padrão durante todo o semestre. A Figura 1 mostra a média e o desvio padrão ao longo do semestre para a turma de Matemática, ao passo que, a turma de Ciências Contábeis é mostrada na Figura 2.

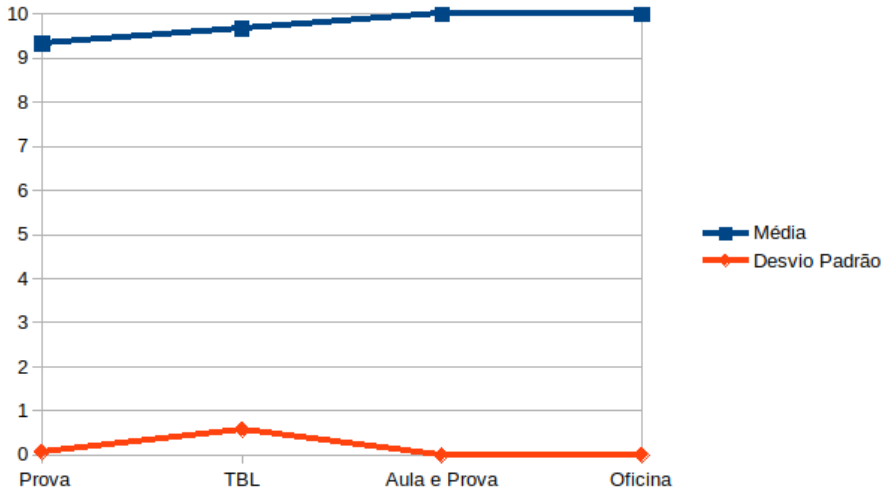


Figura 1. Média e desvio padrão das notas da turma A ao longo do semestre.

Nota-se nos gráficos da Figuras 1 e 2, o crescimento da média em ambos os casos, e também, o decrescimento do desvio padrão, ao longo das aplicações das atividades avaliativas. É importante ressaltar que a média aritmética é uma medida de tendência central enquanto que o desvio padrão é uma medida de dispersão, e juntas, as duas medidas dão um panorama completo da melhora observada.

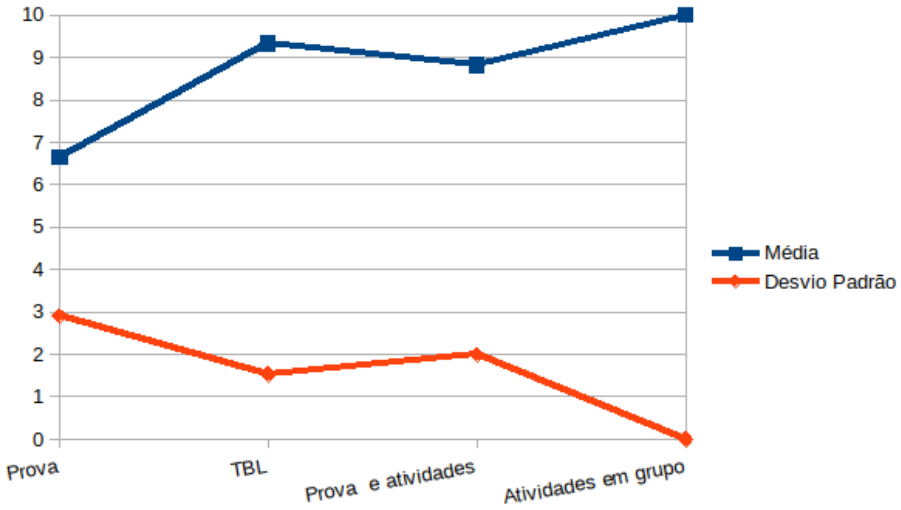


Figura 2. Média e desvio padrão das notas da turma B ao longo do semestre.

No caso da turma de matemática houve melhora, porém pequena e isso se deve ao fato de que os índices eram próximos do máximo esperado e assim se mantiveram. A margem de melhora era pequena, e dentro do que era possível, ainda assim, se observou um aumento na média e diminuição no desvio padrão. Como a melhora é insignificante, é preferível não fazer conclusões precipitadas, como por exemplo, de que a mesma se deu pela alteração de metodologias. Essa hipótese pode ser lançada se observados também os resultados da outra turma.

Na turma do curso de Ciências Contábeis também foi verificada uma melhora na média e no desvio padrão, porém essa alteração é significativa, por exemplo, a média da primeira nota foi de 6,65 e da última foi dez. Aliás, a média foi crescendo ao longo do semestre, à medida que se alterava a metodologia, e o desvio padrão decrescia.

Em um comparativo entre as duas turmas cabe ressaltar que o comportamento dos gráficos é muito parecido em relação a ambas as métricas usadas, a grande diferença é o tamanho da alteração positiva das médias. Em um caso não havia muito espaço para melhorar, isso supondo que o conhecimento obedeça uma curva logarítmica, onde quanto mais conhecimento se tem, mais difícil é aumentá-lo. No outro caso havia muito espaço para melhora e isso foi devidamente aproveitado. Cabe, ainda, salientar que nas duas turmas, a última média foi a nota máxima.

DISCUSSÕES FINAIS

A principal proposta do presente estudo era levantar reflexões que possam levar à discussões sobre as metodologias de ensino e de avaliação, bem como, sobre o uso de diversas metodologias em uma mesma turma em um mesmo período letivo. Para atingir o objetivo inicial foi feito um estudo de caso, foram aplicadas diferentes metodologias de ensino e de avaliação durante um semestre da disciplina de matemática financeira. Além disso, foram feitos em duas turmas distintas a fim de obter uma comparação de resultados.

A metodologia principal foi o TBL, que foi abordado logo após a primeira prova. Sendo que a primeira nota se obteve a partir de ensino tradicional avaliado por prova, com o intuito de avaliar os alunos e de prover um diagnóstico para esse estudo. Além de tais metodologias, foram usadas também as atividades em grupo, oficinas e uso de tecnologias.

Ao final do semestre as notas obtidas em cada metodologia foram comparadas entre as turmas. Pela análise das comparações, constata-se que houve melhora nas duas turmas no

decorrer do semestre, uma melhora gradativa e significante, principalmente na turma B, que obteve as menores notas na primeira prova. Porém, além das notas se observou maior entusiasmo dos alunos durante as aulas.

Levando em conta que essa pesquisa é um estudo de caso, apresentamos algumas reflexões importantes: será que os resultados obtidos seriam corriqueiros se testados em outras turmas? Será que a alteração de metodologias, de fato, leva a um melhor rendimento de uma turma? Ou de forma mais geral, será que esses resultados podem ser estendidos para a maioria dos alunos? Os autores acreditam que sim, mas que a respostas serão encontradas pelos professores em suas turmas, sendo que esse trabalho traz apenas uma possibilidade e não uma solução definitiva.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Diesel A, Baldez ALS, Martins SN (2017). Os princípios das metodologias ativas de ensino: uma abordagem teórica. *Revista Thema*, 14(1): 268-288.

Figueiredo G, Nobre I, Passos MLS (2015). Tecnologias computacionais na educação: Desafios na prática docente. In: Anais do Workshop de Informática na Escola. 127p.

Gadanidis G, De Carvalho BM, Da Ssilva RSR (2016). Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento. São Paulo: Autêntica.

Gonçalves AYM, Rocha GP, Euclides KLLC, Farias TCB, Nascimento LS (2018). O uso do team-based learning como metodologia de ensino de saúde coletiva na graduação em odontologia. *Revista Brasileira de Educação e Saúde*, 8(1): 01-06.

Marques APAZ (2019). A experiência da aplicação da metodologia ativa Team Based Learning aliada à tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem.

Oliveira BLCAD, Lima SF, Rodrigues, LDS, Pereira Júnior GA (2018). Team-Based Learning as a Collaborative Learning Form and Flipped Classroom with Centrality of Students in the Learning Teaching Process. *Revista Brasileira de Educação Médica,* 42(4): 86-95.

Paiva MRF, Parente JRF, Brandão IR, Queiroz AHB (2016). Metodologias ativas de ensino-aprendizagem: revisão integrativa. *SANARE-Revista de Políticas Públicas*, 15(2).

Roman C, Ellwanger J, Becker GC, Silveira, ADD, Machado, CLB, Manfroi WC (2017). Metodologias ativas de ensino-aprendizagem no processo de ensino em saúde no Brasil: uma revisão narrativa. *Clinical and biomedical research*, 37(4): 349-357.

Silva RRD (2018). Pedagogic Aestheticizing, Active Learning and Curricular Practices in Brazil. *Educação & Realidade*, 43(2): 551-568.

Tatto F, Scapin IJ (2004). Matemática: por que o nível elevado de rejeição?. *Revista de Ciências Humanas*, 5(5): 57-70.

Tori R (2018). Educação sem distância: as tecnologias interativas na redução de distâncias em ensino e aprendizagem. Artesanato Educacional LTDA.

Capítulo 4

Extração de Características em Sinais de Voz por meio da Análise de Componentes Independentes

Bruno Rodrigues de Oliveira[1*]

INTRODUÇÃO

Dentre os algoritmos de aprendizagem não supervisionados utilizados nas pesquisas de processamento de sinais, ICA (*Independent Component Analisys*) tem despertado bastante interesse na comunidade científica. Seu sucesso se deve em parte, a sua extensa aplicabilidade nos mais variados problemas, dos quais: 1. Separação cega de sinais de voz, de imagens, de instrumentos musicais, e também aplicações médicas como análise de EEG (Eletroencefalograma), ECG (Eletrocardiograma), ECG fetal, onde os sinais são obtidos misturados em cada eletrodo; 2. No estudo de séries temporais de dados financeiros com o objetivo de detectar anomalias, fornecendo o real impacto do retorno anormal (Franco, 2008); 3. Extração de características dos sinais, que permite, por exemplo, reconhecimento de locutor, de fonemas e caracteres (Kwon e Lee, 2004), redução de ruído (Lee *et al.*, 2000) e compressão. 4. Na área de processamento de texto combinado a linguística, na extração de conceitos, onde um conceito é visto como uma combinação linear de verbos e predicados, e a análise de componentes independentes extraí informações sobre as relações dos verbos e substantivos (Chagnaa *et al.*, 2007).

Outra peculiaridade do método ICA e que também contribuiu para sua popularização, é que ele utiliza estatísticas de ordem superior a dois, como a curtose. Tais estatísticas possuem melhores informações sobre as características dos sinais, pois estatísticas de ordem elevada capturam melhor a variabilidade dos dados (Ozawa e Kotami, 2014). Vários trabalhos em reconhecimento de padrões tem utilizado essa propriedade e obtidos bons resultados, dentre eles: 1. Lee *at al.* (2000), apresenta taxa de erro no percentual de 2.0%, utilizando 20 vetores bases, na tarefa de reconhecimento de locutor, enquanto que o método que utiliza análise mel-cepstral obteve 3.8% de erro; e 2. Kwon e Lee (2004) no estudo de reconhecimento de fonemas,

[1] Rua Londrina, 2038, Sibipiruna, Chapadão do Sul-MS.
* Autor de Correspondência: bruno@cerradosites.com.

que utiliza em conjunto o método PCA (*Principal Component Analysis*) para redução da dimensão dos dados, obtiveram taxas de acerto de aproximadamente 50%.

A última característica que contribuiu para o sucesso do ICA é o algoritmo de ponto fixo FastICA, que possibilitou a utilização em larga escala devido sua eficiência computacional e ainda a facilidade de implementação.

Segundo Hyvärinen *et al.* (2001) em meados de 1980 J. Héraut, C. Jutten e B. Ans propuseram um método que utilizava uma simples rede neural e um modelo de descorrelação não linear para resolver o problema da codificação de movimento em contração muscular, onde sensores, as saídas x_1, x_2, mediam a contração muscular e as entradas s_1, s_2, a posição angular e velocidade do movimento. Embora ainda nessa época o nome ICA não tenha sido cogitado, o modelo $\boldsymbol{x}(t) = A\boldsymbol{s}(t)$ de mistura de fontes, foi utilizado.

No início década de 90, A. Cichocki e R. Unbehauen, propuseram novos métodos para o problema da separação de fontes, introduzindo a técnica conhecida como PCA não-linear. No entanto as pesquisas nesta época estavam restritas aos grupos franceses, não tendo alcançado interesse internacional.

Somente em meados dos anos 90, após avanços no campo da otimização estatística, cresceu o interesse pela técnica ICA após a publicação do artigo de A. J. Bell e T. J. Sejnowski abordando o princípio INFOMAX para a resolução do problema da separação de fontes, com a contribuição de S. I. Amari que introduziu a utilização do gradiente natural. Alguns anos mais tarde os mesmos autores trabalharam para desenvolvimento do algoritmo de ponto fixo FastICA.

Hoje grande parte das pesquisas em ICA se concentra em universidades da Finlândia, Corea e Japão. Na universidade de Helsinki, Finlândia, vários softwares tem sido desenvolvidos para a implementação do ICA, inclusive o pacote para MATLAB® denominado FastICA (Hyvärinen *et al.*, 2001).

ASPECTOS TEÓRICOS

ANÁLISE DE COMPONENTES INDEPENDENTES

A Análise de Componentes Independentes (ICA) é um método estatístico multivariado inicialmente proposto para resolver o problema da separação de fontes num contexto neurofisiológico (Hyvärinen *et al.*, 2001).

Neste problema consideramos um sistema MIMO (*Multiple-Input-Multiple-Output*) onde p sinais de entrada (fontes) são combinados linearmente em n sinais de saída (sensores) (Cichocki *et al.*, 2009):

$$x_i = a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \ldots + a_{ip}s_p \;\forall i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

sendo $s_i\,(i = 1, \ldots, p)$ variáveis latentes mutuamente estatisticamente independentes; $a_{ij}\,(i, j = 1, \ldots, m)$ coeficientes reais que ponderam as fontes para os sinais de mistura x_i, sendo estes os únicos valores diretamente observáveis. Em notação matricial/vetorial se tem:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \ldots \\ s_p \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{x} = A\boldsymbol{s} \tag{2}$$

onde a matriz $A = (a_{ij})$ é chamada de matriz de mistura. Como seus valores são desconhecidos, assim como os das fontes s_i (dai o nome "separação cega"), resolver o problema da Separação Cega de Fontes, *Blind Source Separation* (BSS) é estimar $W = A^+$ encontrando assim os sinais de entrada – as fontes estimadas $\hat{\boldsymbol{s}}$, onde A^+ é a pseudo-inversa da matriz A. Ou seja:

$$\hat{\boldsymbol{s}} = W\boldsymbol{x} \tag{3}$$

A independência estatística acima mencionada implica que, se $\rho_i(s_i)$ é a função densidade de probabilidade marginal de cada fonte s_i e $\rho(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ a função densidade de probabilidade conjunta das s_i, então as fontes s_i são mutuamente estatisticamente independentes se, e somente se:

$$\rho(s_1, s_2, \ldots, s_i) = \rho_1(s_1)\rho_2(s_2)\ldots\rho_p(s_p) \tag{4}$$

Em outras palavras, dizer que as fontes são estatisticamente independentes significa dizer que a informação de uma determinada fonte s_p não diz nada sobre outra fonte s_q, ou seja, as fontes não estão relacionadas.

Em situações reais, principalmente quando se trata de sinais de voz, essa exigência da independência das fontes não restringe a aplicabilidade do método ICA, mas pelo contrário, facilita sua implementação visto que sinais naturais geralmente são independentes.

Outra restrição que se deve considerar diz respeito a distribuição das fontes: que essas devem ter distribuição não-gaussiana, ou somente uma das fontes terem distribuição gaussiana. Isso se deve ao fato do método ICA utilizar estatísticas de alta ordem, como a curtose, e esta, por exemplo, tem valor nulo para variáveis aleatórias com distribuição gaussiana (Hyvärinen *et al.*, 2001).

Para estimar as fontes $\boldsymbol{s}$ na equação (2), partindo do modelo $\boldsymbol{s} = A^+\boldsymbol{x} = W\boldsymbol{x}$, as componentes independentes (ICs) são estimadas considerando uma combinação linear dos $\boldsymbol{x_j}$,

denotada por $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$, sendo $\boldsymbol{b}$ um vetor a ser determinado. Isso implica que $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^T A\boldsymbol{s}$, logo, $\boldsymbol{y}$ também é uma combinação linear dos s_j. Denotando $\boldsymbol{b}^T A$ por $\boldsymbol{q}^T$, tem-se $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^T A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{s}$.

Então se $\boldsymbol{b}$ é uma das colunas de W, $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n][x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \dots \quad x_n]^T = s_j$ é uma das ICs, portanto, $s_j = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{s} \Rightarrow \boldsymbol{q} = [0 \quad \dots \quad 1_j \quad \dots \quad 0]^T$, ou seja, apenas um elemento de $\boldsymbol{q}$ é 1 e o restante igual a 0. Como A é desconhecida, não se pode determinar $\boldsymbol{b}$ exatamente, deve-se então estimá-lo.

Do Teorema Central do Limite, sabe-se que a soma de duas ou mais variáveis aleatórias é mais gaussiana que as variáveis originais. Então $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{s} = q_1 s_1 + q_2 s_2 + \dots + q_p s_p$ é mais gaussiana que qualquer s_j, e torna-se menos gaussiana quando de fato é igual a um dos s_j, o que ocorre quando $\boldsymbol{q} = [0 \quad \dots \quad 1_j \quad \dots \quad 0]^T$, o que por sua vez implica que todos os s_j tem distribuição idêntica.

A ideia então é variar os coeficientes de $\boldsymbol{q}$ e observar como a distribuição de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{s}$ muda. Mas como não se conhece $\boldsymbol{q}$ faz-se isso com $\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x}$, variando os coeficientes de $\boldsymbol{b}$. Se variando os coeficientes de $\boldsymbol{b}$, encontra-se um $\boldsymbol{q} = [0 \quad \dots \quad 1_j \quad \dots \quad 0]^T$, então se encontra uma das ICs s_j.

Em outras palavras, deve-se encontrar um $\boldsymbol{q}$ que tenha a maior quantidade de elementos iguais a zero, exceto um, ou seja, caminha-se no sentido de encontrar um vetor $\boldsymbol{q}$ que torne a distribuição de $\boldsymbol{y}$ menos gaussiana (mais não-gaussiana) quanto possível, já que quanto mais valores de $\boldsymbol{q}$ forem não zero mais próximo a distribuição de $\mathbf{y}$ estará da gaussiana, logo, nesse sentido se está maximizando a não-gaussianidade. Realizando manipulações algébricas concluímos que $\boldsymbol{b}$ deve ser tal que:

$$\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{s} \Rightarrow \boldsymbol{b}^T A\boldsymbol{s} = \boldsymbol{q}^T\boldsymbol{s} \Rightarrow \boldsymbol{b}^T A = \boldsymbol{q}^T \Rightarrow (\boldsymbol{b}^T A)^T = (\boldsymbol{q}^T)^T \Rightarrow A^T\boldsymbol{b} = \boldsymbol{q} \qquad (5)$$

NEGENTROPIA

Uma medida de não-gaussianidade que pode ser utilizada para estimação da matriz W é a negentropia, que é baseada numa quantidade da entropia diferencial. A entropia de um vetor aleatório y com função densidade $\rho_y(y)$ é definida como $H(y) = -\int \rho_y(\eta) log \rho_y(\eta) d\eta$ então a negentropia é

$$J(y) = H(y_{gauss}) - H(y) \qquad (6)$$

onde y_{gauss} é um vetor aleatório gaussiano com mesma correlação e covariância de y. $J(y)$ goza das seguintes propriedades (Pereira, 2003): i) É sempre não negativa; ii) É zero se, e

somente se, y tem distribuição gaussiana; iii) É invariante para transformações lineares invertíveis e para mudanças de escala.

Dado o custo computacional para se calcular $J(y)$ utiliza-se uma aproximação $J(y) \approx \frac{1}{12}[\mathcal{E}\{y^3\}]^2 + \frac{1}{48}kurt(y)^2$ (Zuben e Attux, 2010), onde $\mathcal{E}\{\,.\,\}$ é a esperança matemática. Porém dada a não robustez da curtose, para algumas distribuições de probabilidade, outra aproximação é sugerida. Fazendo-se $\kappa_1 = \frac{1}{12}, \kappa_2 = \frac{1}{48}, f(y) = y^3, g(y) = y^4$, resultando em $J(y) \approx \kappa_1[\mathcal{E}\{f(y)\}]^2 + \kappa_2[\mathcal{E}\{g(y) - g(v)\}]^2$, onde v é uma variável gaussiana de média 0 e variância 1. Portando, a aproximação para a negentropia torna-se (Hyvärinen *et. al.*, 2001):

$$J(y) \propto [\mathcal{E}\{G(y)\} - \mathcal{E}\{G(v)\}]^2 \tag{7}$$

Algumas escolhas adequadas para a função não-quadrática $G(z)$, para alguma variável aleatória z são (Hyvärinen *et al.*, 2001): $G_1(z) = \vartheta^{-1}logcosh(\vartheta z)$ e $G_2(z) = -exp(-z^2/2)$, onde $1 \leq \vartheta \leq 2$.

GRADIENTE DESCENDENTE ESTOCÁSTICO

Para maximizar a não-gaussianidade utiliza-se o método do Gradiente Descendente Estocástico, cujo objetivo é minimizar uma função custo, interativamente, tipicamente dada por

$$C(\boldsymbol{w}) = \mathcal{E}\{G(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} \tag{8}$$

sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor de observação aleatório, e $\boldsymbol{w}$ uma das colunas da matriz W.

Para isso toma-se um ponto inicial $\boldsymbol{w}(0)$, computa o gradiente de $C(\boldsymbol{w})$ nesse ponto, e move-o na direção do gradiente negativo, até que $\|\boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{w}(t-1)\|$ atinja um valor pequeno, ou seja, caminha-se na direção mais íngreme da curva da função. Tem-se a seguinte regra, para $t = 1, 2, \ldots,$ e taxa de aprendizagem α:

$$\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{w}(t-1) - \alpha(t)\frac{\partial C(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}}|_{\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}(t-1)} \tag{9}$$

Denotando por $\Delta\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(t) - \boldsymbol{w}(t-1)$ a diferença entre o valor novo e o valor anterior de $\boldsymbol{w}$, a regra em na equação (9) torna-se:

$$\Delta\boldsymbol{w} = -\alpha\frac{\partial C(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}} \Rightarrow \Delta\boldsymbol{w} \propto -\frac{\partial C(\boldsymbol{w})}{\partial \boldsymbol{w}} \tag{10}$$

Isso significa que o vetor $\Delta\boldsymbol{w}$ tem a mesma direção do vetor gradiente. No entanto, existe um escalar α que pode ter seu tamanho ajustado, e este determina o tamanho do passo na direção do gradiente negativo.

A regra de aprendizagem na equação (9) é conhecida como aprendizagem em lote. Como a função custo na equação (8) depende do cálculo das médias das amostras, o que pode ser

dispendioso computacionalmente, adota-se o paradigma da aprendizagem *on-line*, onde ao invés de considerar as amostras inteiras utiliza-se apenas a última observação do vetor $\boldsymbol{x}$, portanto, a esperança matemática na equação (8) pode ser descartada e a função custo assume a forma $C(\boldsymbol{w}) = G(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})$ (Hyvärinen *et al.*, 2001).

Uma desvantagem desse método é que para funções não quadráticas como as funções G_1, G_2 acima descritas, que podem possuir vários mínimos locais, as interações no algoritmo ocasionalmente conduzem para algum destes extremos locais ao invés dos globais. Neste caso, o método não consegue escapar deste extremo e fornece então uma solução que não é a desejada. Para evitar este problema escolhas adequadas do valor inicial de $\boldsymbol{w}(0)$ devem ser feitas. O algoritmo FastICA abaixo anunciado, utiliza um vetor aleatório com norma unitária para $\boldsymbol{w}(0)$.

GRADIENTE DESCENDENTE ESTOCÁSTICO UTILIZANDO NEGENTROPIA

A ideia principal do algoritmo é iniciar $\boldsymbol{w}$ aleatoriamente, com norma unitária. Obter a direção na qual o valor da negentropia de $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}$ cresça e mover $\boldsymbol{w}$ nessa direção, até que convirja, sendo $\boldsymbol{x}$ um vetor aleatório que foi branqueado e portanto $\mathcal{E}\{(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})^2\} = \|\boldsymbol{w}\|^2 = 1$, sendo $\|\,.\,\|$ a norma euclidiana.

Assim, tomando como função custo a negentropia de $\boldsymbol{w}$, ou seja, $C(\boldsymbol{w}) = [\,\mathcal{E}\{G(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} - \mathcal{E}\{G(\boldsymbol{v})\}]^2$, e normalizando $\boldsymbol{w}$, após cada interação, para que a variância de $\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x}$ permaneça constante, pode-se resumir o algoritmo (Hyvärinen *et al.*, 2001) para estimar $\boldsymbol{w}$:

$$\Delta\boldsymbol{w} \propto \mathcal{E}\{G(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} - \mathcal{E}\{G(\boldsymbol{v})\}\,\mathcal{E}\{\boldsymbol{x}\,g(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} \qquad (11)$$

Para garantir que cada $\boldsymbol{w}$ obtido seja diferente é necessário alguma restrição. Toma-se portanto uma ortogonalização entre as direções de projeção (Zuben e Attux, 2010), utilizando a ortogonalização de Gram-Schmidt com um método deflacionário, onde os vetores $\boldsymbol{w}_p$ são estimados um por um, sendo que após cada interação subtrai-se de $\boldsymbol{w}_{p+1}$ as projeções, ou seja, $\boldsymbol{w}_{p+1} = \boldsymbol{w}_{p+1} - \sum_{j=1}^{p-1}\left(\boldsymbol{w}_{p+1}^T\boldsymbol{w}_j\right)\boldsymbol{w}_j$.

FASTICA

Utilizando a abordagem de ponto-fixo, pode-se melhorar significativamente o algoritmo acima proposto em relação a velocidade de convergência e também a facilidade de implementação. Uma interação de ponto-fixo sugerida para o gradiente na equação (11) é eliminar a parcela $\mathcal{E}\{G(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} - \mathcal{E}\{G(\boldsymbol{v})\}$ da equação, pois esta de qualquer jeito seria cancelada pela normalização de $\boldsymbol{w}$ que segue na interação, e multiplicar ambos os lados por $\alpha\boldsymbol{w}$,

o que melhora as propriedades de convergência (Hyvärinen *et al.*, 2001). Deste modo, obtém-se a seguinte equação interativa:

$$\begin{aligned} (1+\alpha)\boldsymbol{w} &\leftarrow \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}g(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} + \alpha\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w} &\leftarrow {}^{\boldsymbol{w}}/_{\|\boldsymbol{w}\|} \end{aligned} \tag{12}$$

Uma escolha adequada de α torna FastICA uma aproximação do Método de Newton, resolvendo a equação $\mathcal{E}\{\boldsymbol{x}g(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} + \beta\boldsymbol{w} = 0$. O resultado fornece enfim um método de interação de ponto-fixo (Hyvärinen *et al.*, 2001):

$$\boldsymbol{w} \leftarrow \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}g(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\} - \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}g'(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{x})\}\boldsymbol{w} \tag{13}$$

Abaixo resumimos o algoritmo FastICA, utilizado para obter as colunas $\boldsymbol{w}_p$ de W, supondo que o vetor $\boldsymbol{x}$ foi, antes, branqueado e centralizado (Hyvärinen *et al.*, 2001).

1. Defina a quantidade N de componentes a estimar, e faça $p \leftarrow 1$.
2. Escolha um valor inicial aleatoriamente, com norma unitária para $\boldsymbol{w}_p$.
3. Faça $\boldsymbol{w}_p \leftarrow \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}g(\boldsymbol{w}_p^T\boldsymbol{x})\} - \mathcal{E}\{\boldsymbol{x}g'(\boldsymbol{w}_p^T\boldsymbol{x})\}\boldsymbol{w}_p$.
4. Ortogonalize $\boldsymbol{w}_p$ fazendo $\boldsymbol{w}_p \leftarrow \boldsymbol{w}_p - \sum_{j=1}^{p-1}\left(\boldsymbol{w}_p^T\boldsymbol{w}_j\right)\boldsymbol{w}_j$.
5. Normalize $\boldsymbol{w}_p$ fazendo $\boldsymbol{w}_p \leftarrow \frac{\boldsymbol{w}_p}{\|\boldsymbol{w}_p\|}$. Se $\boldsymbol{w}_p$ não convergir[1] volte para o passo 3.
6. Faça $p \leftarrow p + 1$. Enquanto $p \leq N$ volte ao passo 2.

ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

A Análise de Componentes Principais (PCA) é uma transformação linear capaz de descorrelacionar variáveis correlacionadas projetando-as em um espaço de menor dimensão, onde cada dimensão é denominada de Componente Principal, sendo que a primeira componente principal tem a maior variabilidade dos dados, a segunda componente é perpendicular a primeira e tem a segunda maior variabilidade e assim sucessivamente (Loesch e Hoeltgebaum, 2012).

Dado um vetor aleatório $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_p]^T$, com média zero e variância unitária, afim de obter as componentes principais (PCs), primeiro determinam-se os autovalores λ_i na equação característica:

$$|C_x - \lambda I| = 0 \tag{14}$$

sendo C_x a matriz de covariância de $\boldsymbol{x}$, assim definida para p variáveis:

[1] $\boldsymbol{w}_p$ convergirá quanto o valor novo de w_p e o anterior tiverem a mesma direção, isto é, o valor do produto escalar é aproximadamente igual a 1.

$$C_x = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & 1 & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{E}\{(\boldsymbol{x} - m_x)(\boldsymbol{x} - m_x)^T\} \quad (15)$$

onde $c_{ij} = \mathcal{E}\{(x_i - m_i)(x_j - m_j)\}$ é a covariância de x_i, x_j, m_k a média de x_k, e $\mathcal{E}\{x_i x_j\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_i\, x_j \rho_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}$ a esperança de x_i, x_j.

Os autovalores obtidos satisfazem a desigualdade $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_p$. Associado a cada autovalor λ_i tem-se um autovetor $\boldsymbol{v}_i = [v_{i1} \quad v_{i2} \quad \cdots \quad v_{ip}]^T$. Logo, a i-ésima componente principal será $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{x}^T$, o que mostra que os eixos do novo sistema de coordenadas no qual a PCA está projetando os dados, estão na direção dos autovetores $\boldsymbol{v}_i$.

Se $var(\boldsymbol{x})$ denota a variância da variável $\boldsymbol{x}$, então teremos $var(y_1) > var(y_2) > \ldots > var(y_p)$. Como as PCs são descorrelacionadas $corr(y_i, y_j) = 0$, sendo $corr(.)$ a correlação entre as variáveis, então, y_1 é a primeira componente, y_2 a segunda e assim por diante.

A técnica da PCA pode ser utilizada como pré-processamento na implementação do método ICA: 1. Projetando os dados em um subespaço de menor dimensão, o que reduz algumas componentes menos significativas (Green *et al.*, 2002); e 2. Realizando o branqueamento dos dados (Zeman, 2000).

O branqueamento é uma técnica de pré-processamento implementada na maioria dos algoritmos ICA. Ela é útil, pois após a transformação de branqueamento a matriz de separação W é ortogonal. Assim, os algoritmos ICA restringem sua busca ao espaço das matrizes ortogonais, o que por sua vez reduz o número de parâmetros livres do sistema. Além disso, tais matrizes induzem ao surgimento de propriedades numéricas importantes como maior velocidade de convergência e estabilidade se comparado ao espaço das matrizes em geral (Hyvärinen, 2014).

Uma variável aleatória x é dita branca, por definição, se os elementos dessa variável tem variância unitária e são descorrelacionados, ou seja, $\mathcal{E}\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\} = I$. Então, dado um vetor aleatório $x = [x_1 \;\; x_2 \ldots \; x_n]$ com média zero, uma transformação B de branqueamento é tal que $\boldsymbol{z} = B\boldsymbol{x}$ é branco, onde

$$B = D^{-1/2} V^T \quad (16)$$

sendo $V = [v_1\, v_2 \ldots v_n]$ uma matriz de autovetores tendo norma unitária, e $D = diag(\lambda_1\, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$ uma matriz diagonal com os autovalores da matriz de covariância $C_{\boldsymbol{x}}$.

EXTRAÇÃO DE CARACTERÍSTICAS

Em geral métodos de extração de características procuram uma metodologia para representar certos dados de alguma forma mais conveniente para determinada finalidade. O objetivo principal na extração de características baseada em ICA é encontrar uma transformação linear tal que os coeficientes resultantes, sejam tão estatisticamente independentes quanto possível (Kwon e Lee, 2004).

Pelos artigos de Lee *et al.* (2000) e Hyvärinen *et al.* (1999), para extrair características de um sinal $\boldsymbol{x}$ consideramos este sinal segmentado $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$, e aplicamos o algoritmo ICA para obter componentes independentes $\boldsymbol{u}$ de $\boldsymbol{x}$, pela transformação linear:

$$\boldsymbol{u} = W\boldsymbol{x} \tag{17}$$

O algoritmo ICA assume que o sinal observado $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear dos componentes $\boldsymbol{u}$, ou seja:

$$\boldsymbol{x} = W^{+}\boldsymbol{u} \tag{18}$$

O objetivo é então estimar W obtendo W^{+}, tal que, $W^{+}W = \Lambda P$, sendo P uma matriz de permutação e Λ uma matriz diagonal de escala. Portando, quando as saídas $\boldsymbol{u}$ são as fontes $\boldsymbol{s}$, ou seja, $\boldsymbol{u} = \Lambda P\boldsymbol{s}$, alteradas sua ordem e multiplicadas por alguma constante, as funções base (vetores características), são as colunas da matriz W (Bell e Sejnowski, 1996), onde $\boldsymbol{s}$ são as fontes originais.

As Figuras 1 e 2 exibem a forma de onda de um sinal de voz e seus vetores característicos, respectivamente (Kwon & Lee, 2004). Tais vetores foram obtidos atualizando as matrizes de separação a cada 1000 segmentos, e estão ordenados pela norma l_2, assim definida $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2}$.

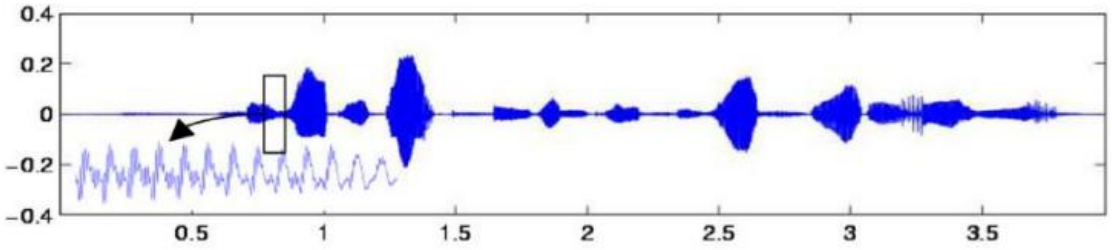


Figura 1. Forma de onda de um sinal de voz. Fonte: Kwon e Lee (2004).

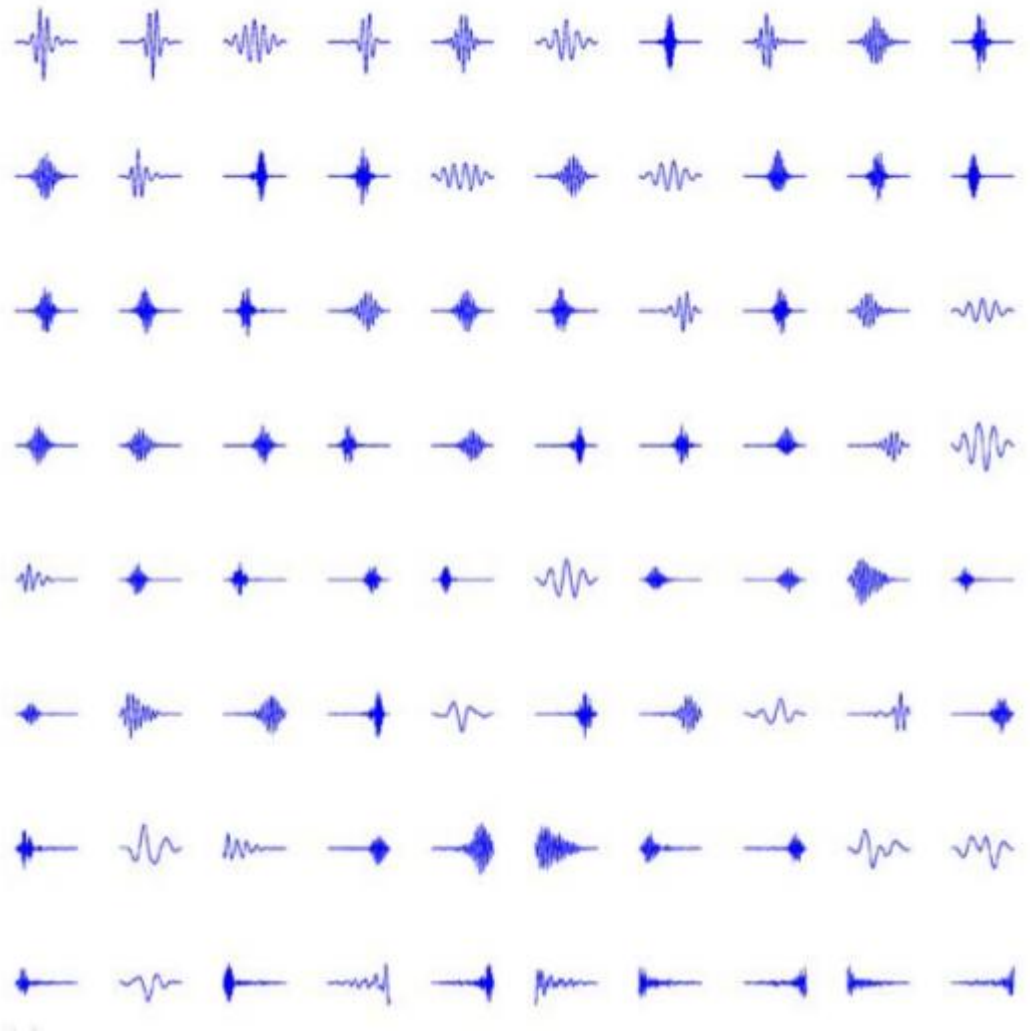


Figura 2. Vetores Característicos do sinal de voz exibido na figura anterior. Fonte: Kwon e Lee, (2004).

REDUÇÃO DE RUÍDO BASEADO NA ICA

CODIFICAÇÃO ESPARSA

Nos métodos de codificação esparsa, uma variável aleatória com média zero é dita esparsa quando sua função densidade de probabilidade (f.d.p) tem um pico em zero e caudas pesadas, ou seja, uma distribuição supergaussiana (Hyvärinen *et al.*, 2001). Como pode ser observado na Figura 3 que exibe algumas formas de ondas de sinais de voz e seus respectivos histogramas, sinais de voz tem esse tipo distribuição.

O método ICA se assemelha a codificação esparsa no sentido que seu objetivo é encontrar as direções em que as componentes descorrelacionadas são tão não-gaussianas quanto possível, enquanto que na codificação esparsa o objetivo é encontrar as componentes tão

esparsas quanto possível. Quando as componentes são esparsas, que é o caso de sinais de voz, então o ICA busca componentes descorrelacionadas tão esparsas quando possível. Na Figura 3 estão ilustrados três sinais de voz e as respectivas densidades, onde pode-se observar um pico em zero, já que a média foi removida.

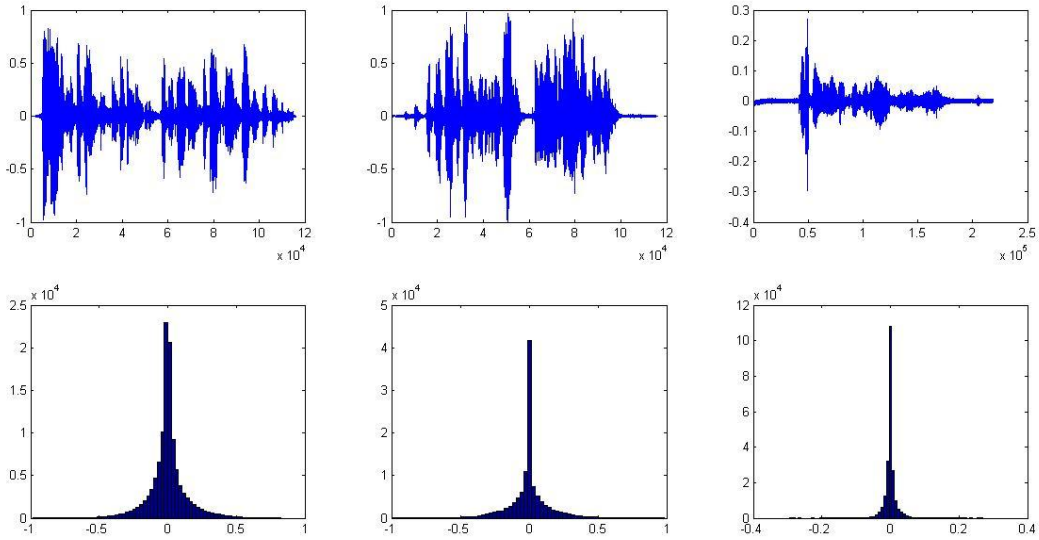


Figura 3. Formas de onda de sinais de voz e seus respectivos histogramas. Fonte: Autor do trabalho.

Em um sinal contaminado por ruído aditivo gaussiano, as componentes esparsas têm valores absolutos próximos de zero. Então, estas podem ser consideradas puramente ruído. Para a redução de ruído tenta-se, utilizando uma abordagem de limiar suave, encolher essas componentes esparsas, semelhante ao método Wavelet *Shrinkage* (Hyvärinen *et al.*,1999).

ESTIMADOR PARA REDUÇÃO DE RUÍDO

Para a tarefa de redução de ruído gaussiano de variáveis aleatórias não-gaussianas, que é o caso considerado aqui, deve-se utilizar o estimador MAP (*Maximum a porteriori estimator*), $\hat{\theta}_{MAP}$ que é definido como o vetor de parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ que maximiza a densidade $\rho_{\theta|x}(\theta|x_T) = \frac{\rho_{x|\theta}(x_T|\theta)\rho_\theta(\theta)}{\rho_x(x_T)}$ de $\boldsymbol{\theta}$ dada as medições de $\boldsymbol{x}_T$, sendo $\hat{\theta}_{MAP}$ o valor de ocorrência mais provável do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ dos dados de $\boldsymbol{x}_T$ (Hyvärinen *et al.*, 2001).

Considera-se o sinal ruidoso $\tilde{\boldsymbol{x}}$ formado pelo sinal limpo $\boldsymbol{x}$ e ruído gaussiano $\boldsymbol{\nu}$ com média zero e variância σ^2:

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\nu} \tag{19}$$

O estimador MAP pode então ser aplicado para fornecer uma versão com ruído reduzido $\hat{\boldsymbol{x}}$, do sinal ruidoso $\tilde{\boldsymbol{x}}$, sendo que este estimador fornece a seguinte estimação

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \underset{\boldsymbol{x}}{argmin}\left[\frac{1}{2\sigma^2}(\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})^2 + f(\boldsymbol{x})\right] \tag{20}$$

onde $f(\boldsymbol{x}) = -log\rho(\boldsymbol{x})$ é o logaritmo negativo da função densidade de probabilidade de $\boldsymbol{x}$.

Supondo f estritamente convexa e diferenciável, a minimização na equação (20) é equivalente a resolver a equação $\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{x}} - \tilde{\boldsymbol{x}}) + f'(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0$ (Hyvärinen *et al.*, 1999) que fornece a função de encolhimento $h(\tilde{\boldsymbol{x}})$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}} - \sigma^2 f'(\hat{\boldsymbol{x}}) = h(\tilde{\boldsymbol{x}}) \tag{21}$$

que tem a seguinte inversa

$$h(\boldsymbol{x})^{-1} = \boldsymbol{x} + \sigma^2 f'(\boldsymbol{x}) \tag{22}$$

Em casos onde a inversa na equação acima não possa ser calcula, uma aproximação é sugerida por Hyvärinen *et al.* (1999):

$$\hat{\boldsymbol{x}}^o = sign(\tilde{\boldsymbol{x}})\max(0, |\tilde{\boldsymbol{x}}| - \sigma^2|f'(\tilde{\boldsymbol{x}})|) \tag{23}$$

sendo $sign(\tilde{\boldsymbol{x}})$ o sinal de $\tilde{\boldsymbol{x}}$, e $\max(\cdot)$ o valor máximo do vetor.

Como pode ser observado na equação (22) o cálculo da inversa da função de encolhimento depende do sinal $\boldsymbol{x}$, no entanto, não temos esse sinal disponível, mas somente o sinal ruidoso $\tilde{\boldsymbol{x}}$. Hyvärinen *et al.* (1999) sugere neste caso a utilização de algum sinal livre de ruído com as mesmas características estatísticas que $\boldsymbol{x}$ para obter $h(\boldsymbol{x})^{-1}$.

ALGORITMO PARA REDUÇÃO DE RUÍDO

Resumindo o algoritmo para redução de ruído temos os seguintes passos (Lee *et al.*, 2000):

1. Forneça como entrada para o algoritmo FastICA (ou algum outro algoritmo ICA) o sinal ruidoso $\tilde{\boldsymbol{x}}$ com segmentos de tamanho n, para obter uma matriz W_{nxn}.
2. Estime as funções de encolhimento h_i para cada vetor base (colunas da matriz de separação W), ou utilize a aproximação dada na equação (23).
3. Calcule os coeficientes ruidosos $\boldsymbol{y}$ do sinal ruidoso $\tilde{\boldsymbol{x}}$, ou seja, $\boldsymbol{y} = W\tilde{\boldsymbol{x}}$.
4. Obtenha os coeficientes sem ruído $\hat{\boldsymbol{s}} = h(\boldsymbol{y})$.
5. Recupera-se o sinal com ruído reduzido $\hat{\boldsymbol{x}} = W^{-1}\hat{\boldsymbol{s}}$.

Os resultados obtidos por Lee *et al.* (2000) estão exibidos na Figura 4.

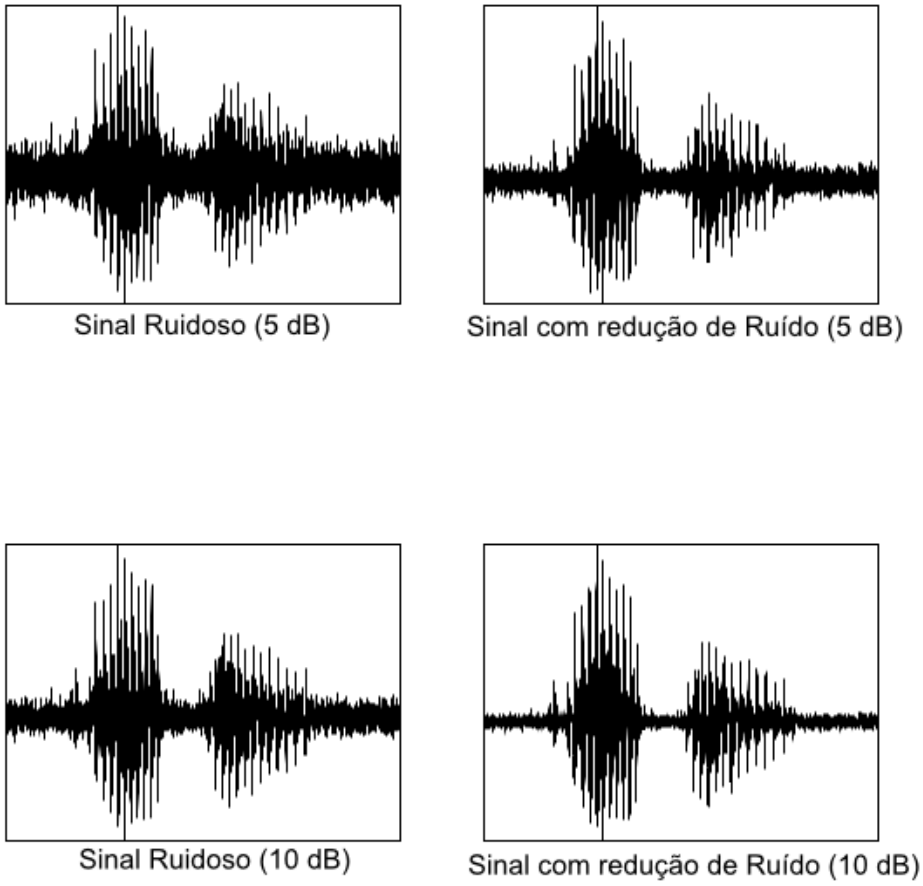


Figura 4. Resultados da redução de ruído implementada por Lee et. al. (2000). Fonte: Adaptado de Lee *et al.* (2000) com legendas traduzidas pelo autor.

CONCLUSÃO

A Análise de Componentes Independentes permite a extração de vetores de características de sinais de voz, que por sua vez podem ser utilizados para diversas finalidades, como na remoção de ruído, e permitem uma representação eficiente destes sinais.

O fato de utilizar estatísticas de ordem superior faz com que este método seja vantajoso, pois algumas informações relevantes dos sinais não são possíveis de serem analisadas utilizando estatísticas de ordem menor que três. A estrutura de fase, que contém as informações espaciais e temporais, as características do sinal, por exemplo, são perceptíveis somente pelas estatísticas de alta ordem. Na tarefa de reconhecimento de locutor, os métodos baseados em ICA tem mostrado vantagem em relação aos métodos baseados na análise cepstral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell AJ, Sejnowski TJ (1996). Learning the higher-order structure of a natural sound. *Network: Computation in Neural Systems*, 7: 261-266.

Cavalcante CC (2004). Sobre Separação Cega de Fontes: Proposições e Análise de Estratégias para Processamento Multi-Usuário. Tese de Doutorado, UNICAMP, São Paulo, 297 p.

Cichocki A, Zdunek R, Phan AH, Amari S (2009). Nonnnegative matrix and tensor factorizations: Applications to exploratory multi-way data analysis end Blind Source Separations. New Jersey: Wiley. 477 p.

Chagnaa A, Ock C, Lee C, Jaimai P (2007). Feature Extraction of Concepts by Independent Component Analysis. *Internation Journal of Information Processing Systems*, 3(1):33-37.

Franco AL (2008). Aplicação da Análise de Componentes Independentes em Estudo de Eventos em Finanças. Tese de Doutorado, UFRS, Porto Alegre, 155 p.

Green CG, Nandy RR, Cordes D (2002). PCA-Preprocessing of fMRI Data Adversely Affects the Results of ICA. Disponível em <http://cds.ismrm.org/ismrm-2002/PDF5/1445.PDF>. Acesso em: 15/04/2014.

Hyvärinen A (2014). Independent Component analysis: recent advances. Disponível em < http://rsta.royalsocietypublishing.org/content/371/1984/20110534.full>. Acesso em: 12/05/2014.

Hyvärinen A, Karuhunen J, Oja E (2001). Independent Component analysis. New Jersey: Wiley, 479p.

Hyvärinen A, Karuhunen J, Oja E (1999). Image Denoising by Sparse Code Shrinkage. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.41.9957>. Acesso em: 07/04/2014.

Hyvärinen A (1999). Fast and Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis. *IEEE – Transactions on Neural Network*, 10(3):626-634.

Kwon O, Lee T (2004). Phoneme recognition using ICA-based feature extraction and transformation. *Signal Processing,* 84(6):1005-1019.

Lee J, Jung H, Lee T, Lee S (2000). Speech Coding and Noise Reduction Using ICA-Based Speech Features. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/versions?doi=10.1.1.27.3670>. Acesso em: 08/04/2014.

Lee J, Jung H, Lee T, Lee S (2000). Speech Feature Extraction Using Independent Component Analisys. *IEEE International Conference*, 3:1631-1634.

Loesch C, Hoeltgebaum M (2012). Métodos Estatísticos Multivariados. São Paulo: Editora Saraiva, 288p.

Ozawa S, Kotanu M (2014). A Study of Feature Extraction and Selecion Using Independent Component Analysis. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.97.2914>. Acesso em: 06/05/2014.

Pereira JMCC (2003). Análise de Componentes Independentes na Separação Cega de Fontes Coincidentes no Espaço. Dissertação de Mestrado, Universidade do Porto, Porto – Portugal.

Zeman T (2000). BSS - Preprocessing Steps for Separation Improvement. Disponível em: <http://noel.feld.cvut.cz/vyu/prj-czs-asi/zeman/pca.pdf>. Acesso em: 15/04/2014.

Zuben FJV, ATTUX RRF (2010). Análise de Componentes Independentes (ICA). Disponível em: <ftp://ftp.dca.fee.unicamp.br/pub/docs/vonzuben/ia004_1s10/notas_de_aula/>. Acesso em: 03/04/2014.

Capítulo 5

Equações Diferenciais Ordinárias na Aplicação de Circuitos Elétricos

Fabrício Ely Gossler[1*]

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi publicado primeiramente como um Trabalho de Conclusão de Curso no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Unidade de Cassilândia, sob orientação do professor Dr. Marco aparecido Queiroz Duarte. Dada sua característica estilo livro texto, achei por bem publica-lo como capítulo de livro também, para que os conhecimentos aqui apresentados sejam mais amplamente divulgados.

As equações diferenciais surgiram no século XVII com os avanços do Cálculo Diferencial e Integral, pelas obras de Newton (1642–1727) e Leibniz (1646–1716), onde puderam ser notados inúmeros modelos matemáticos. A principal motivação para os estudos das equações diferenciais, veio dos problemas de modelagem dos fenômenos da Mecânica Clássica, como por exemplo, o movimento dos planetas (Bassanezi e Ferreira, 1988).

Depois do problema da modelagem ser resolvida através de uma equação diferencial, surgia então o problema de resolução da mesma. Alguns desses problemas foram estudados e resolvidos por Leonhard Euler (1707–1783), alguns membros da família Bernouli (1654–1705) e muitos outros (Bassanezi e Ferreira, 1988).

Durante os estudos das soluções de equações diferenciais surge um matemático que iria fortalecer ainda mais essa teoria. Seu nome era Augustin Louis Cauchy (1789–1857), e ele demonstrou a existência de soluções para uma grande parte das equações diferenciais, que foram apresentadas em muitos modelos (Bassanezi e Ferreira, 1988).

A modelagem que trabalha com as variáveis essenciais se comporta aproximadamente como o problema real estudado. Um modelo bem elaborado que simula um determinado fenômeno físico poderá chegar muito próximo da solução real. Um circuito elétrico, por exemplo, é um modelo matemático que se comporta aproximadamente como um sistema elétrico real (Nilsson e Riedel, 2009).

[1] Rua Clevelândia 1924, Sibipiruna. Chapadão do Sul-MS.
*Autor de Correspondência: fabricioely08@gmail.com

Com a invenção da bateria, por Alessandro Volta (1745–1827), foi possível se obter um fluxo contínuo de corrente. Desse modo surgiram os primeiros circuitos elétricos nos quais se usava uma bateria e eletrodos imersos em um recipiente cheio de água. O fluxo da corrente pela água produzia hidrogênio e oxigênio (Soclof, 2014).

A primeira grande aplicação dos circuitos elétricos foi a de iluminação. Logo após a invenção da lâmpada incandescente por Thomas Edison (1847–193), procurava-se um sistema completo de geração e distribuição de energia (Soclof, 2014).

O principal objetivo desse trabalho é a modelagem de específicos circuitos elétricos, usando equações diferenciais ordinárias. Assim, abordaremos primeiro a teoria das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, com exemplos de resoluções usando os possíveis métodos. Finalmente, abordaremos e definiremos algumas questões de eletricidade para usarmos na modelagem de circuitos elétricos.

TERMINOLOGIA E DEFINIÇÕES BÁSICAS

As equações diferenciais são de extrema importância para o ramo da matemática, elas modelam os mais variados tipos de fenômenos encontrados na natureza. Abrangem certas quantidades que variam com o tempo, ou seja, as equações diferenciais estão diretamente ligadas a taxas de variação.

Enfatizando, "As equações diferenciais têm ampla aplicação na resolução de problemas complexos sobre movimento, crescimento, vibrações, eletricidade e magnetismo, aerodinâmica, termodinâmica, hidrodinâmica, energia nuclear e todo tipo de fenômeno físico que envolva taxas de variação de quantidades variáveis" (Swokowski, 1994, p. 637).

O curso de Cálculo Diferencial e Integral é um dos pré-requisitos básicos que se precisa ter para poder resolver equações diferenciais. Na resolução de uma equação diferencial é indispensável entender o conceito de derivada e dominar certas técnicas de integração (integração por substituição, partes e frações parciais). Pois do Cálculo Diferencial e Integral, temos que uma função $y = f(x)$, tem como sua derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

cujo o resultado, será uma função de x. Como por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 2xy.$$

É importante perceber que o estudo das equações diferenciais não é voltado para derivar funções, isso é muito bem feito nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. O estudo das equações diferenciais está voltado para a resolução de equações diferenciais, ou seja, dada certa

equação como a do exemplo anterior $\frac{dy}{dx} = 2xy$, precisamos encontrar de alguma maneira, uma (função) solução $y = f(x)$ que satisfaça tal equação.

Vejamos a seguir a Definição 1.1 sobre equação diferencial (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Definição 1.1 Equação Diferencial
Uma equação que contêm as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED).

Complementando, "Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais" (Boyce e Diprima, 2001, p. 1).

Exemplo 1.1 – São EDs:

$$\frac{dy}{dt} + 21ty = t^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 13y = 20$$

$$3x\frac{\partial u}{\partial y} - 5y\frac{\partial u}{dx} = 3u$$

$$(y - x)dx + 4xdy = 0$$

$$y' + y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} + y^2 = 0.$$

CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Como é de se esperar, as EDs se distinguem uma das outras, assim como as equações algébricas de primeiro grau se diferenciam das de segundo grau. Precisamente, as EDs são classificadas de acordo com três características: quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

CLASSIFICAÇÃO PELO TIPO

Com relação ao tipo, existem duas classificações para as EDs, uma é a equação diferencial ordinária (EDO) e a outra é a equação diferencial parcial (EDP).

É importante sabermos a quantidade de variáveis de certa ED. "Uma das classificações mais obvias é baseada em descobrir se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes." (Boyce e Diprima, 2001, p. 10)

Se uma equação diferencial contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO) (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Exemplo 1.2 – São EDOs:

$$\frac{dy}{dt} - 7y = 2$$

$$(5y - 3x)dx + 5xdy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = 9x$$

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

"Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP)" (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Exemplo 1.3 – São EDPs:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial s}{dx}$$

$$3x\frac{\partial u}{\partial t} + 2y\frac{\partial u}{dx} = u$$

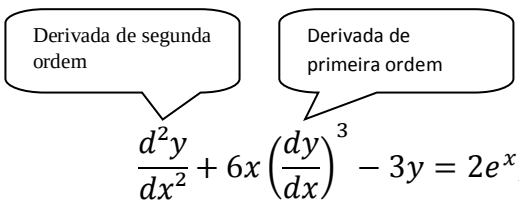
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{dt^2} - 8u\frac{\partial u}{dt}.$$

CLASSIFICAÇÃO PELA ORDEM

Quando temos um polinômio e queremos determinar o seu grau, basta olharmos o maior expoente a que a variável desse polinômio está elevado, ou seja, o grau é o maior número ao qual a variável está elevada. No caso das EDs, para determinarmos sua ordem, o processo é parecido. "A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a sua ordem" (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Exemplo 1.4

A equação



$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3y = 2e^x,$$

é uma EDO de segunda ordem (ou de ordem dois).

Como a equação diferencial $(y - x)dx + xdy = 0$ pode ser escrita na forma $x\frac{dy}{dx} + y = x$, dividindo-se pela diferencial dx, trata-se então de uma EDO de primeira ordem. A equação $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{dt^2} = 0$ é uma EDP de quarta ordem.

Nesse texto limitamos o nosso estudo apenas em aplicações das EDOs. Por isso, omitiremos as EDPs. Não omitimos aqui as EDPs porque não existem aplicações para elas, muito pelo contrário, elas são extremamente importantes em diversas aplicações.

Uma EDO geral de *n*-ésima ordem é frequentemente representada simbolicamente por

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \tag{1.1}$$

CLASSIFICAÇÃO COMO LINEAR E NÃO-LINEAR

Uma EDO é chamada de linear quando pode ser escrita na forma

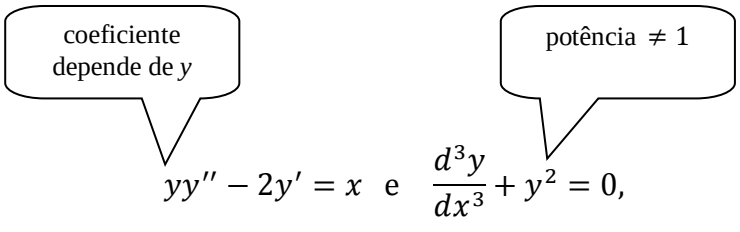
$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{1.2}$$

Observe que as EDOs lineares são caracterizadas por duas propriedades: I) O grau da variável dependente y e de todas as suas derivadas é igual a 1, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1. II) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Uma equação que não é linear é chamada de não-linear (Zill e Gullen, 2001, p. 4).

As equações $xdy + ydx = 0$, $y'' - 2y' + y = 0$, $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$, são EDOs lineares de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente.

Por outro lado,



são EDOs não-lineares de segunda e terceira ordem, respectivamente.

> A teoria matemática e os métodos para resolver equações lineares estão bastante desenvolvidos. Em contraste, a teoria para equações não-lineares é mais complicada e os métodos de resolução são menos satisfatórios. Em vista disso, é auspicioso que muitos problemas significativos levam a equações diferenciais ordinárias lineares ou podem ser aproximados por equações lineares [...] Esse processo de aproximar uma equação não-linear por uma linear é chamado de linearização e é extremamente útil para tratar equações não-lineares (Boyce e Diprima, 2001, p. 11).

SOLUÇÕES

Vejamos a seguir a Definição 1.2 sobre soluções para uma EDO (Zill e Gullen, 2001, p.4):

Definição 1.2 Solução para uma EDO
Qualquer função *f* definida em algum intervalo I, que, quando substituída na EDO reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo dado.

Podemos reescrever essa definição da seguinte maneira: Uma solução para uma EDO,

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.3}$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação (1.3), isto é,

$$F\left(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{1.4}$$

para todo x em algum intervalo I definido.

> [...] Muitas vezes não é tão fácil encontrar soluções de equações diferenciais. No entanto, se você encontrar uma função que pode ser solução de uma equação diferencial dada, é muito fácil, em geral, verificar se a função é de fato solução: basta substituí-la na equação. [...] É claro que isso não é um modo satisfatório de resolver a maioria das equações diferenciais, já que existe um número grande demais de funções possíveis para que se tenha alguma chance de encontrar a função correta aleatoriamente. De qualquer modo, é importante compreender que é possível verificar se qualquer solução proposta está correta substituindo-a na equação diferencial. Para um problema de alguma importância, essa pode ser uma verificação útil e deve ser transformada em hábito (Boyce e Diprima, 2001, p. 11).

Exemplo 1.5: A função $y = e^x$ é uma solução para a EDO $y = y'$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. De fato, se escrevermos a EDO dada como $y - y' = 0$, esubstituirmos $y = e^x$ e $y' = e^x$ implicaremos na identidade, pois $e^x - e^x = 0$, para todo x no intervalo dado.

SOLUÇÕES EXPLICITAS E IMPLÍCITAS

As soluções das EDOs podem ser apresentadas de duas formas, explícitas ou implícitas. "Uma solução para uma EDO $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$ que pode ser escrita na forma $y = f(x)$, é chamada de solução explícita." (Zill e Gullen, 2001, p. 6).

Exemplo 1.6: A EDO $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ tem como solução explícita $y = x^2 + x$.

"Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma solução implícita de uma EDO em um intervalo *I*, se ela define uma ou mais soluções explícitas em *I*" (ZILL, 2001, p. 6).

Exemplo 1.7: A EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ tem como solução implícita $x^2 + y^2 - 49 = 0$, no intervalo de $-7 < x < 7$. De fato, pois pela derivação implícita temos $\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} - \frac{d(49)}{dx} = 0$ e $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

NÚMERO DE SOLUÇÕES

No que se diz respeito ao número exato de soluções de uma EDO, podemos dizer que ela possui um número infinito (uma família de soluções), único ou nenhuma solução.

Exemplo 1.8: A função $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ em que c_1 e$c_2$são constantes arbitrárias, é uma solução de $y'' + 4y = 0$. De fato, diferenciando y, obtemos $y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$ e $y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$. Logo,

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1) \sin 2x + (-4c_2 + 4c_2) \cos 2x \\ &= (0) \sin 2x + (0) \cos 2x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim a função $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ satisfaz a EDO, para quaisquer valores das constantes c_1 e c_2. Portanto a EDO $y'' + 4y = 0$ possui infinitas soluções.

Exemplo 1.9: A seguinte EDO $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y^2 = 0$ possui uma única solução, que é $y = 0$.

Exemplo 1.10: A EDO $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + 7y^2 = -23$ não possui solução. Observamos que nesta EDO, o primeiro membro é uma soma de potências pares, enquanto o segundo membro é negativo. Como nenhuma solução (função) $y(x)$ satisfaz tal equação, a EDO dada não tem solução.

SOLUÇÃO PARTICULAR E SOLUÇÃO GERAL

Uma solução particular de uma EDO é qualquer solução da mesma. A solução geral da EDO é o conjunto de todas as suas soluções.

> Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de **solução particular**. Uma maneira de obter uma solução particular é escolher valores específicos para o(s) parâmetro(s) na família de soluções. [...] Se *toda* solução para $F(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$no intervalo Ipode ser obtida de $G(x, y, c_1 \dots c_n) = 0$ por uma escolha apropriada dos c_i, $i = 1,2, \dots, n$, dizemos que a família a n-parâmetros é uma solução **geral,** ou **completa**, para a equação diferencial (Zill e Gullen, 2001, p. 9-10).

Exemplo 1.11: A função $y = ce^x$ é uma solução geral da EDO $y' = y$, pois $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para a mesma. Para $c = 0, -2$ e 5, obtemos as soluções particulares $y = 0$, $y = -2e^x$ e $5e^x$, respectivamente.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL E VALORES DE CONTORNO

Um problema de valor inicial caracteriza-se pelas condições subsidiárias (informações extras) se referindo a um único ponto da variável independente. Estas condições são chamadas de condições iniciais. Em problemas de valores de contorno, as condições subsidiárias se referem a mais de um ponto da variável independente. Neste caso, as condições subsidiárias são chamadas de condições de contorno.

Exemplo 1.12: O problema $y'' + 2y' = e^x; y(\pi) = 1, y''(\pi) = 2$ é um problema de valor inicial, pois as duas condições subsidiárias $y(\pi) = 1$ e $y''(\pi) = 2$ são dadas no mesmo ponto.

Exemplo 1.13: O problema $y'' + 2y' = e^x; y(3) = 2, y''(5) = 4$ é um problema de valor de contorno, pois as duas condições subsidiárias $y(3) = 2$ e $y''(5) = 4$ são dadas em diferentes pontos.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

As EDOs de primeira ordem são da forma

$$F(x, y, y') = 0. \tag{2.1}$$

Podemos escrever a equação (2.1) de outra forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{2.2}$$

ou ainda, podemos escrever a equação(2.2) na forma diferencial

$$f(x, y)dx - dy = 0, \tag{2.3}$$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

Suponhamos que tivéssemos que resolver uma EDO de primeira ordem na forma (2.2) sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário. Então temos o seguinte problema:

Resolva: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Sujeito a: $y(x_0) = y_0$

Esse problema é chamado de **problema de valor inicial**. "Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal

que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado *a priori"* (Zill e Gullen, 2001, p.39).

Exemplo 2.1: Vimos no Exemplo 1.11 do Capítulo 1, que $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para $y' = y$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Se especificarmos, digamos $y(0) = 3$, então substituindo $x = 0$ e $y = 3$ na família, obteremos $3 = ce^0 = c$. Logo a função $y = 3e^x$ é uma solução para o PVI $y' = y$, $y(0) = 3$. Se tivéssemos pedido uma solução de $y' = y$ que passe pelo ponto $(1,3)$ em vez de $(0,3)$, então $y(1) = 3$ iria nos dar $c = 3e^{-1}$, e daí, $y = 3e^{x-1}$.

Existem duas questões fundamentais, que surgem quando estamos considerando um PVI (Zill e Gullen, 2001, p.40): Existe uma solução para o problema? Ou seja, A EDO $dy / dx = f(x, y)$ possui uma solução cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0)? Se essa solução existe, ela é única? No exemplo 2.2 mostraremos que a resposta à segunda questão é: algumas vezes não.

Exemplo 2.2: Podemos verificar que cada uma das funções $y = 0$ e $y = \frac{x^4}{16}$ satisfaz a equação diferencial e a condição inicial no problema $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0.$

Quando estamos interessados em resolver uma EDO de primeira ordem, é comum analisarmos antes se existe uma solução para ela, e se, caso exista, ela será única. Charles Émile Picard (1856–1941) enunciou um teorema que nos ajuda a responder essas questões. Vejamos a seguir o Teorema 2.1 (Zill e Gullen, 2001, p. 40) que nos garante a existência e a unicidade de soluções, e logo em seguida a sua demonstração.

Teorema 2.1 Existência de uma Única Solução

Seja *R* uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são contínuas em *R*, então existe um intervalo *I* centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em *I* que satisfaz o problema de valor inicial (PVI).

Demonstração (SANTOS, 2010):

Primeiro provaremos a existência da solução e depois sua unicidade.

1. Existência:

Definindo a sequência de funções $y_n(t)$ por $y_0(x) = y_0, \ y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\, ds$, para $n = 1,2,3 \ldots$ Como $f(x, y)$ é contínua no retângulo R, existe uma constante positiva β tal que $|f(x, y)| \leq \beta$, para $(x, y) \in R$. Assim, $|y_1(x) - y_0| \leq \beta |x - x_0|$,

para $a \leq x \leq b$. Como $\partial \mathrm{f}/\,\partial \mathrm{y}$ é contínua no retângulo R, existe uma constante positiva α tal que $|f(x,y) - f(x,z)| \leq \alpha|y - z|$ para $a \leq x \leq b, c \leq y,\ z \leq d$.

Assim, $|y_2(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))|\, ds \leq \alpha \int_{x_0}^{x} |y_1(s) - y_0|\, ds \leq \alpha\beta \int_{x_0}^{x} |s - x_0| ds = \alpha\beta \frac{|x-x_0|^2}{2}$, isto é, $|y_2(x) - y_1(x)| \leq \alpha\beta \frac{|x-x_0|^2}{2}$. Do mesmo modo, $|y_3(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))|\, ds \leq \alpha \int_{x_0}^{x} |y_2(s) - y_1|\, ds \leq \alpha^2\beta \int_{x_0}^{x} \frac{|s-x_0|^2}{2} ds = \alpha^2\beta \frac{|x-x_0|^3}{6}$, ou seja, $|y_3(x) - y_2(x)| \leq \alpha^2\beta \frac{|x-x_0|^3}{6}$.

Suponhamos por indução que $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \alpha^{n-2}\beta \frac{|x-x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$, então

$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))|\, ds \leq \alpha \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}|\, ds \leq \alpha \int_{x_0}^{x} \alpha^{n-2}\beta \frac{|s-x_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = \alpha^{n-1}\beta \frac{|x-x_0|^n}{n!}$, isto é,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \alpha^{n-1}\beta \frac{|x - x_0|^n}{n!} \tag{2.4}$$

Estas desigualdades são válidas para $a \leq a' \leq x \leq b' \leq b$ em que a' e b' são tais que $c \leq y_n(x) \leq d$ sempre que $a' \leq x \leq b'$.

Segue de (2.4) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \beta \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k(x) - y_{k-1}(x))$$

então, $y_n(x)$ é convergente. Seja

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x).$$

Como

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{m} \alpha^{k-1} \frac{(b-a)^k}{k!}$$

assim, passando ao limite quando m tende a infinito obtemos que

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(b-a)^k}{k!}. \tag{2.5}$$

Logo, dado um $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(x) - y_n(x)| < \epsilon/3$, para $a' \leq x \leq b'$. Daí segue-se que $y(x)$ é contínua, pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente

próximo de x, temos que $|y(x) - y_n(s)| < \epsilon/3$ e para n suficientemente grande e $|y(x) - y_n(x)| < \epsilon/3$ e $|y(s) - y_n(s)| < \epsilon/3$ o que implica que

$$|y(x) - y_n(s)| \leq |y(x) - y_n(x)| \leq |y(s) - y_n(s)| < \epsilon.$$

Além disso, para $a' \leq x \leq b'$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, \lim_{n\to\infty} y_n(s))ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$$

pois por (2.5) temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_0}^{x} f\big(s, y_n(s)\big)\, ds - \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)\, ds\right| &\leq \int_{x_0}^{x} \left|f\big(s, y_n(s)\big) - f\big(s, y(s)\big)\right| ds \\ &\leq \alpha \int_{x_0}^{x} |y_n(s) - y(s)|\, ds \\ &\leq \alpha\beta(x - x_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(b-a)^k}{k!}\end{aligned}$$

que tende para zero quando n tende para infinito. Portanto

$$\begin{aligned}y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_n(x) \\ &= y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f\big(s, y_{n-1}(s)\big)\, ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(s))ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)\, ds,\end{aligned}$$

ou seja,

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(b-a)^k}{k!}. \tag{2.5}$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\big(s, y(s)\big)\, ds. \tag{2.6}$$

Derivando a equação (2.6) em relação a x, podemos notar que $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial.

Unicidade

Supondo que $y(x)$ e $z(x)$ sejam soluções do PVI. Seja $u(x) = \int_{x_0}^{x} |y(s) - z(s)|\, ds$. Assim, como $y(x) = \int_{x_0}^{x} y'(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds$, $z(x) = \int_{x_0}^{x} z'(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, z(s))$, então

$$\begin{aligned} u'(x) &= |y(s) - z(s)| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |y'(s) - z'(s)|\, ds \\ &= \int_{x_0}^{x} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|\, ds \\ &\leq \alpha \int_{x_0}^{x} |y(s) - z(s)| \\ &= \alpha u(x) \end{aligned}$$

ou seja, $u'(x) \leq \alpha u(x)$. Subtraindo $\alpha u(x)$ e multiplicando por $e^{-\alpha x}$, obtemos $\frac{d}{dx}(e^{-\alpha x} u(x)) \leq 0$, com $u(x_0) = 0$. Isto implica que $e^{-\alpha x} u(x) = 0$, lembrando que $u(x) \geq 0$ e portanto que $u(x) = 0$, para todo x. Assim $y(x) = z(x)$, para todo x.

> O resultado anterior é um dos mais populares teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem, porque os critérios de continuidade de $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são relativamente fáceis de ser verificados. Em geral, não é possível determinar um intervalo especifico I no qual uma solução está definida sem realmente resolver uma equação diferencial. (Zill e Gullen, 2001, p. 41).
>
> [..] Se você encontrar um problema de valor inicial durante a investigação de um problema físico, você pode querer saber se ele tem solução antes de gastar um bocado de tempo e esforço para resolvê-lo. Além disso, se conseguir encontrar uma solução, você pode estar interessado em saber se deve continuar a procurar outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções. (Boyce e Diprima, 2001, p. 35).

Exemplo 2.3: Vimos que no Exemplo 2.2 que a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ possui pelo menos duas soluções cujos gráficos passam por $(0,0)$. As funções $f(x, y) = xy^{1/2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$ são contínuas no semi-plano superior definido por $y > 0$. Concluímos do Teorema 2.1 que, dado um ponto qualquer (x_0, y_0) com $y_0 > 0$ (por exemplo$(0,1)$), existe algum intervalo em torno de x_0 no qual a equação diferencial dada possui uma única solução $y(x)$, tal que $y(x_0) = y_0$.

CLASSIFICAÇÃO DAS EDOS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma EDO assume a seguinte forma se a função f for independente da variável dependente y:

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{2.7}$$

Assim, a equação (2.7) terá uma solução por integração direta, ou seja, basta integrar ambos os lados da equação

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x)\, dx. \tag{2.8}$$

Como $\int \frac{dy}{dx} dx = y$ (pois a integral e a derivada são operações inversas, isto é, integrar a derivada de uma função resulta na própria função) e $F(x)$ é a anti-derivada de $f(x)$, teremos a seguinte solução de (2.7):

$$y = F(x) + c. \tag{2.9}$$

A constante c surgiu por causa da integração. Observamos que a equação (2.9) é uma **solução geral** da EDO dada. Podemos escolher qualquer valor de c para ser uma solução da equação. Suponhamos que tivéssemos as seguintes condições iniciais para o PVI:

$$y(x_0) = y_0. \tag{2.10}$$

Só precisamos substituir as condições iniciais de (2.10) em (2.9) para obtermos: $y_0 = F(x_0) + c \Longrightarrow c = y_0 - F(x_0)$. Assim achando um valor fixo para c, obtemos uma **solução particular** para o PVI $\frac{dy}{dx} = f(x),\ y(x_0) = y_0$. Note que geralmente para acharmos uma solução particular, precisamos primeiro achar a solução geral do problema.

É de se esperar que dependendo da EDO não se aplique esse método da integração direta. Para algumas EDOs, existem métodos específicos de resoluções de acordo com suas próprias características. A seguir são apresentadas as definições de quatro classes de EDOs de primeira ordem:

- Equações com Variáveis Separáveis;
- Equações Homogêneas;
- Equações Exatas;
- Equações Lineares.

Essas classes são especiais devido ao fato de existirem métodos de resoluções exclusivas para a EDO. Esses métodos foram desenvolvidos e se aplicam para uma determinada EDO que possui certa característica, ou seja, o método de resolução que deverá ser usado dependerá da característica específica da mesma. Lembrando que nem toda EDO de primeira ordem se encaixa em uma dessas classes, e também nem mesmo pode ser transformada em uma delas.

EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Considere uma EDO do tipo $\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$ onde f e g são funções contínuas em algum intervalo de R. Dizemos que essa EDO é "separável" ou tem "variáveis separáveis". Separando então as variáveis

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx. \tag{2.11}$$

e integrando a equação (2.11) em ambos os membros $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + c$, obtemos

$$F(y) = G(x). \tag{2.12}$$

Se pudermos inverter a função F, a solução formal em (2.12) será $y = F^{-1}(G(x))$. Vejamos agora a Definição 2.1 de Equação Separável (Zill e Gullen, 2001, p.44).

Definição 2.1 Equação Separável
Uma EDO da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ é chamada **separável** ou de **variáveis separáveis**

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Como o próprio nome já diz, o ponto chave para resolver esse tipo de EDO é separar as variáveis, colocando a variável dependente de um lado da equação enquanto que a variável independente fica do outro. A equação (2.11) indica o procedimento desse fato. Depois de separar as variáveis, basta aplicar a integração. Vejamos o Exemplo 2.4 seguinte:

Exemplo 2.4: Resolva $(1 + x)dy - ydx = 0$. Resolução: Podemos reescrever $(1 + x)dy - ydx = 0$ como sendo $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$. Integrando ambos os lados da equação e resolvendo-a, obteremos

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{1+x}$$
$$ln|y| = ln|1 + x| + C_1$$
$$y = e^{ln|1+x|+C_1}$$
$$= e^{ln|1+x|}.e^{C_1}$$
$$= |1 + x|.e^{C_1}$$
$$= \pm e^{C_1}(1 + x).$$

Trocando $\pm e^{C_1}$ por c, concluímos que a solução para a EDO é $y = c(1 + x)$.

Observe que não existe a necessidade de usar duas constantes de integração na resolução de uma EDO, pois, múltiplos, somas, diferenças ou combinações de constantes podem ser trocados por uma única constante. Por isso, nos próximos exemplos adotaremos esse fato.

Exemplo 2.5: Resolva $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{1+x}$. Resolução: Podemos reescrever $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{1+x}$ como sendo $y^2dy = \frac{1+x}{x^2}dx$, ou ainda $y^2dy = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}dx$. Integrando essa última em ambos os lados e resolvendo a integração, obteremos

$$\int y^2\,dy = \int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = -x^{-1} + ln|x| + k.$$

Multiplicando essa última equação por $3x$, teremos $xy^3 = -3 + 3x\ ln|x| + 3kx$. Trocando $3k$ por c, concluímos que a solução implícita do problema será $xy^3 = -3 + 3x\ ln|x| + cx$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

A chave para resolver uma EDO homogênea é transformá-la em uma EDO separável, aplicando uma determinada substituição. Vejamos agora a definição 2.2 (Zill e Gullen, 2001, p. 52) de Equação Homogênea.

Definição 2.2 Equação Homogênea
Uma EDO da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é chamada de **homogênea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Para entendermos o método de resolução das EDOs Homogêneas, primeiro é preciso entender o que é uma função homogênea. Dizemos que uma função é homogênea de grau n se ela satisfaz a seguinte condição: $f(tx,ty) = t^nf(x,y)$ para algum número real n. Se $f(x,y)$ for uma função homogênea de grau n, podemos escrever então

$$f(x,y) = x^nf\left(1,\frac{y}{x}\right) \text{ e } f(x,y) = y^nf\left(\frac{x}{y},1\right), \qquad (2.13)$$

sendo $f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ e $f\left(\frac{x}{y},1\right)$ ambas homogêneas de grau zero. Suponhamos que temos a seguinte EDO

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \qquad (2.14)$$

e, verificando que M e N são funções homogêneas de mesmo grau, podemos então resolver essa mesma por meio de uma substituição algébrica. Dependendo da EDO podemos chamar $y = ux$ ou $x = vy$, sendo que u e $v$são as novas variáveis independentes. Esta substituição nos

possibilitará transformar a EDO homogênea em uma EDO de variáveis separáveis. Vejamos: Chamamos $y = ux$, logo sua diferencial $dy = udx + xdu$. Substituindo agora em (2.14), temos

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[u\,dx + x\,du] = 0. \tag{2.15}$$

Pela propriedade da homogeneidade dada em (2.13), podemos escrever (2.15) como

$$x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)[u\,dx + x\,du] = 0$$

ou

$$[M(1, u) + uN(1, u)]dx + xN(1, u)du = 0. \tag{2.16}$$

Assim, separando as variáveis em (2.16), teremos $\frac{dx}{x} + \frac{N(1,u)\,du}{M(1,u)+uN(1,u)} = 0.$ Portanto, transformamos a EDO inicial homogênea em separável. De maneira análoga podemos obter a separação fazendo $x = vy$.

Exemplo 2.6: Resolva $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$ usando uma substituição apropriada. Resolução: Temos que $M(x, y) = y^2 + yx$ e $N(x, y) = -x^2$. Notemos que M e N são funções homogêneas de grau 2. Logo a EDO dada é homogênea. Fazendo $y = ux$, então $dy = udx + xdu$. Assim,

$$\begin{aligned}
(y^2 + yx)dx - x^2dy &= 0\\
[(ux)^2 + (ux)x]dx - x^2(udx + xdu) &= 0\\
u^2x^2dx + ux^2dx - x^2udx - x^3du &= 0\\
x^2(u^2 + u - u)dx - x^3du &= 0\\
x^2u^2dx - x^3du &= 0\\
x^2u^2dx &= x^3du\\
\frac{x^2}{x^3}dx &= \frac{1}{u^2}du,
\end{aligned}$$

resultando em

$$\tfrac{1}{x}dx = \tfrac{1}{u^2}du. \tag{2.17}$$

Aplicando a integração em (2.17), obtemos $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{u^2}du + c,$ e resolvendo essa última equação, teremos $ln|x| = -u^{-1} + c$

$$ln|x| + u^{-1} = c. \tag{2.18}$$

Como

$$y = ux \Longrightarrow u = \tfrac{y}{x}. \tag{2.19}$$

Substituído (2.19) em (2.18) teremos, $ln|x| + \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = c$, logo,

$$ln|x| + \frac{x}{y} = c. \tag{2.20}$$

Multiplicando a equação (2.20) por y teremos a seguinte solução implícita da EDO: $yln|x| + x = yc$.

EQUAÇÕES EXATAS

Uma EDO na forma (2.14) é uma equação exata se

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \tag{2.21}$$

Vejamos agora a definição 2.3 (Zill e Gullen, 2001, p. 61) de Equação Exata.

Definição 2.3 Equação Exata
Uma EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x,y)$. Uma EDO da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é chamada de **equação exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Dada uma EDO na forma (2.14), ou seja, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Primeiro temos que verificar se ela é exata, isto é, temos que mostrar que (2.21) se verifica. Se (2.21) é satisfeita então podemos supor que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y). \tag{2.22}$$

Assim, integrando (2.22) em relação a x, obtemos

$$f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y). \tag{2.23}$$

Lembrando que y é considerada como uma constante, portanto $g(y)$ é a constante de integração. Agora, derivando (2.23) com relação a y e supondo também que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ teremos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$. Logo

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx. \tag{2.24}$$

Por fim, basta integrarmos (2.24) em relação a y e substituir esse resultado em (2.23). A solução para a equação é $f(x,y) = c$. Podemos observar que poderíamos ter escolhido como suposição $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ e assim teríamos $f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h'(x)$ e $h'(x) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy$.

Exemplo 2.7: Resolva $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$. Resolução: Temos que $M(x,y) = 2y^2x - 3$ e $N(x,y) = 2yx^2 + 4$, e podemos verificar que $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 4yx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$. Logo, a EDO é exata. Assim, suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x - 3$ e integrando essa última equação em relação a x, temos $f(x,y) = \int 2y^2x - 3\,dx + g(y)$, ou seja,

$$f(x,y) = y^2x^2 - 3x + g(y). \tag{2.25}$$

Agora, derivando (2.25) com relação a y e supondo também que $\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 4$ teremos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 4$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2x^2 - 3x + g(y)\right) = 2yx^2 + 4$$

$$2yx^2 + g'(y) = 2yx^2 + 4,$$

portanto,

$$g'(y) = 4. \tag{2.26}$$

Integrando (2.26) em relação a y $\int g'(y)\,dy = \int 4\,dy$ obtemos

$$g(y) = 4y. \tag{2.27}$$

Lembrando que nesse caso a constante de integração não precisa ser incluída, pois a solução é $f(x,y) = c$. Substituindo (2.27) em (2.25) obtemos a seguinte solução para a EDO $y^2x^2 - 3x + 4y = c$. É importante destacarmos que a solução para a equação não é $f(x,y) = y^2x^2 - 3x + 4y$, mas sim, $f(x,y) = c$.

FATOR INTEGRANTE

Nem sempre uma EDO da forma (2.14) será exata, ou seja, teremos situações em que a condição (2.21) não se verifica. Entretanto, é possível transformar (2.14) em uma EDO exata, mediante a multiplicação de um fator adequado.

Definição 2.4 Fator Integrante
Uma função $\mu(x,y)$ é um fator integrante de $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se a equação $\mu(x,y)[M(x,y)dx + N(x,y)dy] = 0$ é exata.

Exemplo 2.8: Resolva $6xy\,dx + (4y + 9x^2)dy = 0$, usando $\mu(x,y) = y^2$, como fator integrante. Resolução: Podemos verificar que a equação diferencial dada,

$$6xy\,dx + (4y + 9x^2)dy = 0. \tag{2.28}$$

não é separável, homogênea e nem exata. Multiplicando (2.28) por $\mu(x, y)$ obtemos

$$6xy^3\,dx + (4y^3 + 9y^2x^2)\,dy = 0. \tag{2.29}$$

que é exata, pois fazendo $M(x, y) = 6xy^3$ e $N(x, y) = 4y^3 + 9y^2x^2$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 18xy^2 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Com isso podemos resolver a equação (2.29), cuja solução será a mesma de (2.28). Fazendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3$ e integrando essa última equação em relação a x, obtemos

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \int 6xy^3\,dx + g(y) \\ &= 6y^3 \int x\,dx + g(y) \\ &= 6y^3\left(\frac{x^2}{2}\right) + g(y) \\ &= 3y^3x^2 + g(y), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x, y) = 3y^3x^2 + g(y). \tag{2.30}$$

Derivando (2.30) com relação a y obtemos $\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2x^2 + g'(y)$. Supondo que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$, dessa última teremos que, $9y^2x^2 + g'(y) = 4y^3 + 9y^2x^2$

isto é,

$$g'(y) = 4y^3. \tag{2.31}$$

Integrando (2.31) em relação a y

$$g(y) = \int 4y^3\,dy = \mathrm{y}^4 \tag{2.32}$$

e substituindo (2.32) em (2.30) resulta em $f(x, y) = 3y^3x^2 + \mathrm{y}^4$, ou seja, $3y^3x^2 + \mathrm{y}^4 = \mathrm{c}$.

EQUAÇÕES LINEARES

Já definimos no Capítulo 1, a forma geral (1.2) das EDOs lineares de ordem n. No caso em que $n = 1$, teremos

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{2.33}$$

ou seja, uma EDO linear de primeira ordem. Vejamos agora a Definição 2.5 de Equação Linear (Zill e Gullen, 2001, p. 69).

Definição 2.5 Equação Linear
Uma EDO da forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ é chamada de **linear.**

Dividindo (2.33) pelo coeficiente $a_1(x)$, teremos $\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. Chamando $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$, obtemos uma forma mais conveniente para a EDO linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{2.34}$$

Usando diferenciais podemos escrever a equação (2.34) como sendo $dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0$. As EDOs lineares possuem uma interessante propriedade pela qual sempre podemos encontrar um fator integrante $\mu(x)$ em que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0. \tag{2.35}$$

O lado esquerdo da equação (2.35) é uma diferencial exata se $\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)dy = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)]$ ou $\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$. Podemos facilmente resolver essa última equação (EDO separável), determinando o fator integrante $\mu(x)$. Temos então $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$. Integrando essa última equação em ambos os lados, teremos

$$ln|\mu| = \int P(x)dx. \tag{2.36}$$

Aplicando a exponencial nos dois lados da equação (2.36) obtemos,

$$e^{ln|\mu|} = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Portanto a função $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ é um fator integrante para uma EDO linear.

Para resolvermos uma EDO linear de primeira ordem do tipo $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$, primeiro precisamos escrevê-la na forma (2.34). Para isso basta dividirmos toda a equação por $a_1(x)$, ou seja, fazemos com que o coeficiente de $\frac{dy}{dx}$ seja igual a um: $\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. Depois de identificarmos$P(x)$, podemos encontrar o fator integrante, e em seguida, multiplicamos a equação (2.34) pelo mesmo, obtendo:

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx} = e^{\int P(x)dx}f(x). \tag{2.37}$$

O lado esquerdo da equação (2.37) é a derivada do produto do fator integrante $e^{\int P(x)dx}$ pela variável dependente y. Assim, podemos reescrever (2.37) como sendo

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] = e^{\int P(x)dx}f(x). \tag{2.38}$$

Para finalizar, basta integrarmos em ambos os lados da equação (2.38) $\int \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]dx = \int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx$ para chegarmos na solução geral de (2.33): $y = \frac{\int e^{\int P(x)dx}f(x)\,dx}{e^{\int P(x)dx}}$.

Exemplo 2.9: Resolva a EDO $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$, encontrando a solução geral, especificando um intervalo para o qual ela está definida. Resolução: Observamos primeiramente que a equação dada é uma EDO linear de primeira ordem. Colocando-a na forma (2.34), obteremos

$$\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{4}{3}. \tag{2.39}$$

Como $P(x) = 4$, logo teremos o seguinte fator integrante $\mu(x)$: $\mu(x) = e^{4x}$. Multiplicando (2.39) pelo fator integrante encontrado, obtemos $e^{4x}\left[\frac{dy}{dx} + 4y\right] = e^{4x}\frac{4}{3}$, logo,

$$e^{4x}\frac{dy}{dx} + e^{4x}4y = e^{4x}\frac{4}{3}. \tag{2.40}$$

Lembrando que o lado esquerdo da equação (2.40) é a derivada do produto entre o fator integrante e^{4x} pela variável dependente y. Assim

$$\frac{d}{dx}(e^{4x}y) = e^{4x}\frac{4}{3}. \tag{2.41}$$

Integrando ambos os lados de (2.41) em relação a *x* e resolvendo a equação resultante, obtemos

$$\int \frac{d}{dx}(e^{4x}y)\,dx = \int e^{4x}\frac{4}{3}dx$$

$$e^{4x}y = \frac{4}{3}\int e^{4x}\,dx$$

$$e^{4x}y = \frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}e^{4x} + c\right],$$

portanto,

$$e^{4x}y = \frac{1}{3}e^{4x} + \frac{4}{3}c. \tag{2.42}$$

Multiplicando a equação (2.42) por e^{-4x}, teremos a seguinte solução e o respectivo intervalo para a qual ela esta definida: $y = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}ce^{-4x},\ -\infty < x < +\infty$.

Exemplo 2.10: Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} + 5y = 20$, sujeita a condição inicial $y(0) = 2$. Resolução: A equação já foi dada na forma (2.34). Assim, o fator integrante é e^{5x}. Multiplicando a EDO dada pelo fator integrante obtemos

$$e^{5x}\left[\frac{dy}{dx} + 5y\right] = e^{5x}20$$

$$e^{5x}\frac{dy}{dx} + e^{5x}5y = e^{5x}20,$$

e que de maneira análoga ao exercício anterior, nos dirige para $e^{5x}y = 20\int e^{5x}\,dx$.
Resolvendo então essa última expressão chegamos ao seguinte resultado

$$y = 4 + ce^{-5x}. \tag{2.43}$$

De acordo com a condição inicial temos que $y(0) = 2$, ou seja, $x = 0 \Rightarrow y = 2$. Substituindo estes valores em (2.43), teremos $2 = 4 + ce^{-5(0)}$, de onde chegamos que $c = -2$. Portanto, a solução particular desse problema é $y = 4 - 2e^{-5x},\ -\infty < x < +\infty$.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM

As EDOs de segunda ordem são da forma

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{3.1}$$

Podemos escrever (3.1) de outra forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'). \tag{3.2}$$

No Capítulo anterior, vimos que podemos resolver EDOs não-lineares de primeira ordem, usando determinadas técnicas de resolução. Entretanto no caso de EDOs não-lineares de segunda ordem não podemos desfrutar do mesmo privilégio. Isso porque as EDOs não-lineares de ordem superior são mais difíceis de serem resolvidas, mesmo que algumas delas possuam soluções. Por isso, neste Capítulo nos restringimos as EDOs lineares de segunda ordem.

Vimos no Capítulo 1 a forma geral (1.2) das equações diferencias lineares de ordem n. No caso em que $n = 2$, teremos

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{3.3}$$

ou seja, uma EDO linear de segunda ordem. Lembrando que as funções coeficientes $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ são contínuas em um determinado intervalo *I*, onde $a_2(x) \neq 0$.

Dividindo (3.3) por $a_2(x)$, obtemos

$$\frac{a_2(x)}{a_2(x)}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)}y = \frac{g(x)}{a_2(x)}, \tag{3.4}$$

e, chamando $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ e $\frac{g(x)}{a_2(x)}$ respectivamente de $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$, podemos reescrever (3.4) de uma forma mais compacta, como sendo $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$ ou

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{3.5}$$

Quando$f(x) = 0$ então (3.5) é dita **homogênea**, ou seja, a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.6}$$

é uma EDO linear de segunda ordem homogênea. Caso $f(x) \neq 0$ então (3.5) é dita **não-homogênea.**

Exemplo 3.1: A equação $3y'' + 7y' - 5y = 0$ é uma EDO linear de segunda ordem homogênea. A equação$xy'' - 5xy' + 6y = e^x$ é uma EDO linear de segunda ordem não-homogênea.

Veremos nesse Capítulo que para resolvermos uma equação não-homogênea, devemos primeiro resolver a equação homogênea associada, ou seja, uma vez resolvida a equação homogênea, sempre é possível resolver a equação não-homogênea correspondente ou, pelo menos, expressar sua solução em função de uma integral. Assim, o problema de resolver uma equação homogênea é o mais fundamental (Boyce e Diprima, 2001, p. 70.)

PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

Para uma EDO linear de 2ª ordem temos a seguinte situação do PVI:

$$\begin{cases} \text{Resolva: } a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ \text{Sujeito a: } y(x_0) = y_0, \quad y'_{x_0} = y'_0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Observemos que o PVI de uma EDO linear de segunda ordem exige duas condições iniciais. A solução para esse PVI é uma função que satisfaça a EDO em certo intervalo *I* que contenha o ponto x_0, e que cujo gráfico da solução, passa pelo ponto (x_0, y_0) com inclinação igual a $y_0{}'$.

> Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam, apenas, um ponto particular (t_0, y_0) que tem que pertencer ao gráfico da solução, mas, também, o coeficiente angular y'_0 da reta tangente ao gráfico naquele ponto. É razoável esperar que sejam necessárias duas condições iniciais para uma equação de segunda ordem, já que, grosso modo, precisa-se de duas integrações para se encontrar a solução e cada integração introduz uma constante arbitrária. Presume-se que duas condições iniciais serão suficientes para a determinação dos valores dessas duas constantes. (Boyce e Diprima, 2001, p.70.)

O Teorema 3.1 a seguir, nos garante a existência de uma única solução para (3.7) (Zill e Gullen, 2001, p.143).

Teorema 3.1 Existência de uma Única Solução

Sejam $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ não todos nulos e $g(x)$contínuas em um intervalo *I*, para todo *x* neste intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o PVI (3.7) neste intervalo.

Exemplo 3.2: Verifique se a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução para o PVI $y'' - 4y = 12x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 1.$ Resolução: Temos que verificar se a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução da EDO dada com os valores das condições iniciais: $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$. Primeiro vamos verificar se y é realmente a solução da EDO. Para isso vamos achar as derivadas de y de primeira e segunda ordem respectivamente, logo

$$y' = 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$$
$$y'' = 12e^{2x} + 4e^{-2x}.$$

Substituindo os valores na EDO, obtemos

$$y'' - 4y = 12x$$
$$(12e^{2x} + 4e^{-2x}) - 4(3e^{2x} + e^{-2x} - 3x) = 12x$$
$$12e^{2x} + 4e^{-2x} - 12e^{2x} - 4e^{-2x} + 12x = 12x$$
$$12x = 12x.$$

Segundo, vamos verificar se as condições iniciais do PVI estão corretas

$$\mathrm{y}(0) = 3\mathrm{e}^{2(0)} + \mathrm{e}^{-2(0)} - 3(0) = 3 + 1 - 0 = 4$$
$$\mathrm{y}'(0) = 6\mathrm{e}^{2(0)} - 2\mathrm{e}^{-2(0)} - 3 = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Portanto, como os coeficientes da EDO são contínuos em qualquer intervalo contendo $x = 0$, podemos concluir a partir do Teorema 3.1, que a função dada é a única solução do PVI dado.

O WRONSKIANO

Neste tópico apresentaremos importantes definições e conceitos, que serão úteis nos estudos de EDOs lineares de segunda ordem. Antes de definir o que é o Wronskiano, precisamos definir outros dois importantes conceitos: Dependência e Independência Linear entre funções.

Definição 3.1 Dependência Linear

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$ é **linearmente dependente** (LD) em um intervalo *I* se existem constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ não todas nulas, tais que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ \dots + c_n f_n(x) = 0$ para todo *x* no intervalo.

Exemplo 3.3: As funções $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$ e $f_4(x) = x^4$ são LD no intervalo $(0, \infty)$, pois f_2 pode ser escrita como uma combinação linear de f_1, f_3 e f_4, ou seja, $f_2(x) = (1)f_1(x) + (5)f_3(x) + (0)f_4(x)$ para todo *x* no intervalo $(0, \infty)$. Em um caso específico, se duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são LD, então isso significa que uma pode ser escrita como o produto da outra por uma constante.

Definição 3.2 Independência Linear

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é **linearmente independente** (LI) em um intervalo *I,* se ele não é LD no intervalo, ou seja se as constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ são ambas iguais e todas nulas, tais que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ \dots + c_n f_n(x) = 0$, para todo *x* no intervalo.

Exemplo 3.4: As funções $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = e^{2x}$ são LI em qualquer intervalo. De fato, se tivermos as constantes c_1e c_2 tais que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ e $c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 0$, podemos observar que os valores para $f_1(x)$ e $f_2(x)$ serão diferentes de zero para qualquer que seja o valor de *x* e portanto a única solução possível é a solução trivial, onde $c_1 = c_2 = 0$.

A seguir veremos um teorema (Zill e Gullen, 2001, p. 149), que corresponde a um critério para independência linear de funções:

Teorema 3.2 Critério para Independência Linear de Funções

Suponha que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n - 1$ vezes. Se o determinante $\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo *I,* então as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ são LI em *I.*

O determinante do teorema anterior é denotado por $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ e é chamado de o **Wronskiano** das funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Em seguida apresentamos a demonstração do Teorema 3.2, no caso em que $n = 2$.

Demonstração:

Como $n = 2$, temos duas funções, $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Suponhamos por absurdo que quando $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$, para um certo valor de x_0 fixado em algum intervalo *I*, as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sejam LD nesse intervalo. De fato, se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são LD, então existem constantes c_1e c_2 não ambas nulas, tais que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para todo *x* no intervalo *I*. Se derivarmos essa combinação, obteremos $c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0$. Com isso, chegamos a um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0 \end{cases}. \tag{3.8}$$

Como f_1 e f_2 são funções LD, logo (3.8) possui uma solução não trivial, para cada *x* no intervalo. Assim, $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = 0$ para todo *x* pertencente ao intervalo *I*. O que é um absurdo, pois por hipótese temos $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$. Portanto f_1 e f_2 são funções LI.

Exemplo 3.5: As funções $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$ e $f_3(x) = x^2e^x$ são LI em qualquer intervalo do eixo *x*, pois o Wronskiano, $W(e^x, xe^x, x^2e^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x}$ não se anula em ponto algum.

EDOS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM HOMOGÊNEAS

Como vimos anteriormente nesse Capítulo, uma EDO linear de segunda ordem homogênea tem como forma a expressão em (3.6). Uma característica particularmente útil da equação linear homogênea é o fato de que a soma, ou **superposição,** de quaisquer duas ou mais soluções de (3.6) é novamente uma solução. Esta é a ideia do teorema a seguir (Zill e Gullen, 2001, p. 153):

Teorema 3.3 Princípio de Superposição
Sejam $y_1, y_2, \ldots, y_k$ soluções para a EDO linear de *n*-ésima ordem homogênea (3.6) em um intervalo *I*. Então, a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ \ldots \ + c_k y_k(x) \qquad (3.9)$$

em que $c_i,\ i = 1,2,\ldots,k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Demonstração: Provaremos esse teorema para o caso em que $n = k = 2$, isso por estarmos discutindo as EDOs de segunda ordem. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da EDO

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \qquad (3.10)$$

Como $n = k = 2$, temos $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Derivando essa última equação duas vezes, teremos

$$y' = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \qquad (3.11)$$

e

$$y'' = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x). \qquad (3.12)$$

Substituindo (3.11) e (3.12) em (3.10), obteremos

$$a_2(x)[c_1 y_1'' + c_2 y_2''] + a_1(x)[c_1 y_1' + c_2 y_2'] + a_0(x)[c_1 y_1 + c_2 y_2] =$$
$$c_1[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + c_2[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2] =$$
$$c_1(0) + c_2(0) = 0,$$

pois $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções. Portanto $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é também uma solução.

Exemplo 3.6: Podemos verificar que $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = sen\ x$ são duas soluções da equação homogênea $y'' + y = 0$. O Teorema 3.3 nos garante que qualquer combinação linear destas soluções, por exemplo, $y = 3y_1 - 2y_2 = 3\cos x - 2\ sen\ x$ será também uma solução. Deste modo, podemos concluir que toda solução de $y'' + y = 0$ é uma combinação linear destas duas soluções particulares y_1 e y_2. Portanto, a solução geral de $y'' + y = 0$ é $y(x) = c_1 \cos x + c_2\ sen\ x$.

SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES

Nas resoluções das EDOs homogêneas (3.6), queremos soluções linearmente independentes. Vimos que o Wronskiano de duas funções LI é diferente de zero. Discutiremos agora o fato de que se duas funções y_1 e y_2 são soluções de uma EDO linear de segunda ordem homogênea, então o seguinte Teorema é valido (Edwards e Penney, 1993, p. 88):

Teorema 3.4 Wronskiano de Soluções

Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação (3.6) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, num intervalo aberto *I* no qual *p* e *q* são contínuas.

a) Se y_1 e y_2 são LD, então $W(y_1, y_2) = 0$ em *I;*

b) Se y_1 e y_2 são LI, então $W(y_1, y_2) \neq 0$ em cada ponto de *I*.

Assim, de acordo com o Teorema 3.4, o Wronskiano não se anula se as soluções são LI. Quando temos duas soluções y_1 e y_2 LI de (3.6), então $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ será uma solução geral da equação (3.6). Esse último resultado é formalizado no Teorema 3.5 (Edwards e Penney, 1993, p. 88):

Teorema 3.5 Soluções Gerais
Sejam y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes da equação(3.6) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ com p e q contínuas no intervalo aberto *I*. Se *Y* é qualquer solução da equação (3.6), então existem números c_1 e c_2 tais que $Y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ para todo x em I.

O Teorema 3.5 diz que se encontrarmos duas soluções LI da equação (3.6), então, podemos encontrar todas as suas soluções.

Demonstração: Seja *a* um ponto pertencente ao intervalo *I,* e considere as seguintes equações simultâneas

$$\begin{cases} Y(a) = c_1y_1(a) + c_2y_2(a) \\ Y'(a) = c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) \end{cases}. \tag{3.13}$$

O determinante dos coeficientes desse sistema de equações lineares nas incógnitas c_1e c_2 é simplesmente o Wronskiano $W(y_1, y_2)$ avaliado em *a*. Pelo Teorema 3.4, esse determinante não é nulo, assim por álgebra elementar segue-se que das equações do sistema (3.13) podem ser encontradas as constantes c_1 e c_2. Com estes valores encontrados definimos a solução

$$G(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

da equação (3.6). Então

$$G(a) = c_1y_1(a) + c_2y_2(a) = Y(a)$$

e

$$G'(a) = c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) = Y'(a).$$

Portanto, as duas soluções *Y* e *G* têm os mesmos valores iniciais em *a,* assim como *Y'* e *G'*. Pela unicidade de uma solução determinada por tais valores iniciais (Teorema 3.1), segue-se que *Y* e *G* são iguais em *I*. Vemos então que

$$Y(x) \equiv G(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x).$$

Exemplo 3.7: As duas soluções $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = e^{-3x}$ são ambas da seguinte EDO linear homogênea de segunda ordem $y'' - 9y = 0$. Como $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq$

0 para todo valor de x no intervalo $(-\infty, \infty)$, então, a solução geral para a EDO dada é $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$.

EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Discutiremos agora as EDOs lineares homogêneas de segunda ordem do tipo

$$ay'' + by + c = 0. \tag{3.14}$$

onde os coeficientes a, b e c são ambos constantes. Nesse caso, o fato surpreendente é que todas as soluções para (3.14) são funções exponenciais ou construídas a partir de funções exponenciais (Zill e Gullen, 2001, p. 153).

EQUAÇÃO AUXILIAR

Vamos nos preocupar inicialmente em achar uma única solução da equação (3.14). Observemos antes disso que

$$(e^{mx})' = me^{mx} \text{ e } (e^{mx})'' = m^2e^{mx}, \tag{3.15}$$

para qualquer valor de m. Assim podemos concluir que qualquer derivada de e^{mx} é um múltiplo constante de e^{mx}. Portanto, se substituirmos $y = e^{mx}$ em (3.15), cada termo seria um múltiplo constante de e^{mx}, com os coeficientes constantes dependentes de m e dos coeficientes a, b e c, ou seja, $m^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$ ou $e^{mx}(am^2 + bm + c)$.

Isso nos leva a tentar encontrar o valor de m de modo que esses múltiplos de e^{mx} tenham soma igual a zero (para satisfazer a igualdade de (3.14)). Lembrando que $e^{mx} \neq 0$ para valores reais de x, então a única chance dessa função exponencial ser uma solução de (3.14) é se conseguirmos encontrar o valor de m, de tal forma que ela seja a raiz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \tag{3.16}$$

Essa última equação é chamada de equação auxiliar ou equação característica da equação (3.14).

Vamos discutir agora as possibilidades das raízes da equação (3.16). Temos que considerar três casos (Zill e Gullen, 2001, p. 173): Raízes Reais Distintas; Raízes Reais Iguais; Raízes Complexas Conjugadas.

Caso 1: Raízes Reais Distintas
Se as duas raízes m_1 e m_2 da equação (3.16) são reais e distintas, então $$y(x) = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \tag{3.17}$$ é a solução geral da equação(3.14).

Exemplo 3.8: Encontre uma solução geral de $2y'' - 7y' + 3y = 0$. Resolução: Temos que a equação característica da EDO dada é $2m^2 - 7m + 3 = 0$. Ou $(2m - 1)(m - 3) = 0$. É fácil perceber que as raízes da equação característica são $m_1 = \frac{1}{2}$ e $m_2 = 3$, que são reais e distintas. Logo teremos a seguinte solução geral para a EDO dada: $y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}$.

Caso 2: Raízes Reais Iguais
Se a equação (3.16) tem raízes reais iguais $m_1 = m_2$, então $$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{m_1 x} \quad (3.18)$$ é a solução geral da equação(3.14).

Exemplo 3.9: Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 5 \quad y'(0) = -3 \end{cases}$. Resolução: Observamos primeiro que a equação característica $m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = 0$, tem raízes reais e iguais a $m_1 = m_2 = -1$. Portanto a solução geral da EDO dada será $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$. Se derivarmos sua solução geral, chegamos em $y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$. Assim as condições iniciais do PVI, nos fornecem as seguintes equações:

$$y(0) = (c_1 + c_2(0))e^{-(0)} = c_1 = 5 \Longrightarrow c_1 = 5$$

$$y'(0) = -c_1 e^{-(0)} + c_2 e^{-(0)} - c_2(0)e^{-(0)} = -c_1 + c_2 = -3 \Longrightarrow c_1 + c_2 = -3$$

o que implica em $c_1 = 5$ e $c_2 = 2$. Então a solução desejada do PVI é $y(x) = (5 + 2x)e^{-x}$.

Caso 3: Raízes Complexas Conjugadas
Se a equação (3.16) tem as raízes m_1 e m_2 complexas, onde $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\, \beta x + c_2 sen\, \beta x) \quad (3.19)$$ é a solução geral da equação (3.14).

Exemplo 3.10: Resolva a equação diferencial $y'' - 10y' + 41y = 0$. Resolução: As raízes da equação característica $m^2 - 10m + 41 = 0$ são $m = 5 \pm 4i$, ou seja, raízes complexas. Portanto pelo Caso 3, obtemos a seguinte solução geral para a EDO dada: $y(x) = e^{5x}(c_1 cos\, 4x + c_2 sen\, 4x)$.

EDOS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM NÃO-HOMOGÊNEAS

Vimos que a equação (3.5) $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ é dita não-homogênea quando $f(x) \neq 0$.

Discutiremos agora a solução geral de uma EDO linear não-homogênea de segunda ordem. Pelo que já foi dito, para se resolver uma EDO não-homogênea primeiro é preciso resolver a equação homogênea associada.

É importante destacar que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de (3.5), então $y_1(x) - y_2(x)$ também será uma solução de (3.6) (Figueiredo, 2002, p. 99).

Logo, se conhecermos uma **solução particular** $y_p(x)$de (3.5), então uma solução geral de (3.5), será dada por $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$, onde c_1e c_2 são constantes arbitrárias e y_1 e y_2 é um par de soluções LI de (3.6).

Mas o que seria essa solução particular $y_p(x)$? é qualquer função que é uma solução de (3.5), independente de qualquer parâmetro. Algumas vezes $y_p(x)$ é chamada de **integral particular.**

Exemplo 3.11: Uma solução particular para $y'' + 4y = 12x$ é $y_p(x) = 3x$, pois $y_p''(x) = 0$ e $0 + 4y_p = 0 + 4(3x) = 12x$.

Vejamos o seguinte Teorema (Zill e Gullen, 2001, p. 159) de Solução de Equações Não-homogêneas, no caso em que a EDO é de segunda ordem:

Teorema 3.6 Solução de Equações Não-homogêneas
Sejam y_1 e y_2 soluções para a EDO linear homogênea de segunda ordem (3.6) em um intervalo *I,* e seja y_p qualquer solução para a equação não-homogênea (3.5) no mesmo intervalo. Então, $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$ é também uma solução para a equação não-homogênea no intervalo para quaisquer constantes c_1e c_2.

A combinação linear $\mathrm{y_c(x)} = \mathrm{c_1y_1}(x) + \mathrm{c_2y_2(x)}$ que é a solução geral da equação (3.6), é chamada de **função complementar** para a equação (3.5). Podemos dizer de uma forma mais compacta, que a solução geral para uma EDO linear não-homogênea é

$$Y = \mathrm{y_c}(x) + y_p(x). \qquad (3.20)$$

$$Y = \text{função complementar} + \text{qualquer solução particular.}$$

Exemplo 3.12: Encontre a solução geral da EDO linear não-homogênea $y'' + 4y = 12x$.

Resolução: Vimos no exemplo anterior que uma solução particular de $y'' + 4y = 12x$ é $y_p(x) = 3x$. Agora, vamos achar a função complementar, e para isso vamos considerar a EDO homogênea associada $y'' + 4y = 0$. Temos que a equação característica dessa EDO é $m^2 + 4 = 0$. Assim, podemos chegar facilmente que as raízes (complexas) da equação característica serão $m_1 = 2i$ e $m_2 = -2i$. Chegamos então, no Caso 3 de EDOs homogêneas de coeficientes

constantes, cujo formato da solução geral é $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 cos\ \beta x + c_2 sen\ \beta x)$. Como $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, a solução geral da EDO homogênea associada (que é a função complementar) é $y_c(x) = c_1 cos\ 2x + c_2 sen\ 2x$. Logo, a solução geral da EDO proposta no exercício será $y(x) = c_1 cos\ 2x + c_2 sen\ 2x + 3x$.

Nesse caso a função particular foi facilmente deduzida. Entretanto em muitas situações, a obtenção da função particular $y_p(x)$ não é tão imediata assim.

Veremos adiante dois métodos práticos que são utilizados para se obter $y_p(x)$. Esses métodos são conhecidos como o método dos coeficientes indeterminados e o método da variação de parâmetros.

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Como vimos, uma solução para uma EDO não-homogênea de segunda ordem (3.5) tem a forma (3.20). Portanto resolver (3.5) exige dois passos:

1- Achar a função complementar $y_c(x)$.

2- Encontrar, seja qual for, uma solução particular $y_p(x)$ da EDO não-homogênea.

Um dos meios para se encontrar $y_p(x)$ é chamado de Método dos Coeficientes Indeterminados, que também é chamado de Método dos Coeficientes a Determinar. Entretanto existem alguns limites para esse método, pois ele só pode ser aplicado quando a equação (3.5) tem seus coeficientes constantes e $g(x)$ se limita apenas em: um polinômio em x; uma função exponencial e^{kx}; um função do tipo $\cos kx$ ou $sen\ kx$; ou também na soma ou produto dessas funções.

Assim $g(x)$ é uma combinação linear de funções do tipo (Zill e Gullen, 2001, p.183) $k\ (constante), x^n, x^n e^{x\alpha} \cos \beta x$ e $x^n e^{x\alpha} \operatorname{sen} \beta x$, em que *n* é um inteiro não negativo e α e β são números reais.

Essas funções têm a importante característica de que suas derivadas de somas ou produtos são somas ou produtos das mesmas funções. A grande jogada do método dos coeficientes indeterminados está na exploração das características dessas funções, pois como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem que ser identicamente igual a $g(x)$, assim y_p tem a mesma forma que $g(x)$.

O método dos coeficientes indeterminados requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $Y(x)$, mas com os coeficientes não especificados. Substituímos, então, a expressão hipotética na equação (3.5) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação (3.5)

e podemos usá-la como a solução particular de $Y(x)$. Caso contrário, se não pudermos determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma que supusemos. Nesse caso, temos que modificar a hipótese inicial e tentar de novo. (Boyce e Diprima, 2001, p.91).

Veremos agora o Teorema 3.7 que nos auxilia na busca da função particular $y_p(x)$ (Zill e Gullen, 2001, p. 161):

Teorema 3.7 Princípio de Superposição – Equações não-homogêneas
Sejam y_{p1}, y_{p2},...,y_{pk} *k* soluções particulares para a EDO linear homogênea de segunda ordem (3.5) em um intervalo *I*, correspondendo a *k* funções distintas g_1,g_2,...,g_k qualquer. Isto é, suponha que y_{pi} seja uma solução particular para a EDO correspondente $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_i(x)$ em que *i* = 1,2,...,*k*. Então, $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \ ... \ + y_{pk}(x)$ é uma solução particular para $a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \ ... \ + g_k(x)$.

Exemplo 3.13: Resolva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2. \tag{3.21}$$

Resolução: Temos que a equação homogênea associada é $y'' - y' - 2y = 0$. Como vimos anteriormente, a solução dessa última equação chamada de função complementar é $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$. Temos que $g(x) = 4x^2$ é um polinômio do segundo grau. Isso nos leva a tentar o uso do método dos coeficientes indeterminados, e supor que a função particular $y_p(x)$, também tem a forma de um polinômio de segundo grau. Então $y_p(x)$ terá a seguinte forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C. \tag{3.22}$$

onde *A, B* e *C* são constantes arbitrarias pertencente aos reais.

Assim, $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Substituindo esses valores na equação (3.21), obtemos $2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$, ou equivalentemente, $-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (2A - B - 2C) = 4x^2 + (0)x + 0$. Identificando os coeficientes, chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} -2A = 4 \\ -2A - 2B = 0 \\ 2A - B - 2C = 0 \end{cases}. \tag{3.23}$$

As soluções de (3.23) são: $A = -2$, $B = 2$, $C = -3$. Substituindo esses valores em (3.22), obtemos a seguinte solução particular $y_p(x) = -2x^2 + 2x - 3$. Como a solução geral de uma

EDO de segunda ordem não-homogênea é dada por $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, então teremos a seguinte solução geral do problema apresentado $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$.

Observamos que em (3.22) fizemos uma suposição da forma como a função particular se apresentaria. Na Tabela 3 são apresentadas sugestões de tentativas coerentes como essa. Considerando, por garantia, que nenhuma função da suposta solução particular y_p faça parte da função complementar y_c (Zill e Gullen, 2001, p. 188).

Tabela 3: Tentativas para Soluções Particulares

$g(x)$	Forma de y_p
1. (qualquer constante)	A
2. $5x + 2$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
5. $sen\ 4x$	$A\cos 4x + B\ sen\ 4x$
6. $\cos 4x$	$A\cos 4x + B\ sen\ 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9-2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. x^2e^{5x}	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x}sen\ 4x$	$Ae^{3x}\cos 4x + Be^{3x}\,\text{sen}\,4x$
11. $5x^2sen\ 4x$	$(Ax^2 + Bx + C)\cos 4x + (Dx^2 + Ex + F)\,\text{sen}\,4x$
12. $xe^{3x}cos\ 4x$	$(Ax + B)e^{3x}\cos 4x + (Cx + D)e^{3x}\,\text{sen}\,4x$

Exemplo 3.14: Resolva $y'' - y' - 2y = sen\ 2x$. Resolução: Já vimos no Exemplo 3.13 que a função complementar dessa equação é $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$. Temos que $\mathrm{g(x)} = \mathrm{sen\ 2x}$. Assim, a melhor tentativa para y_p, segundo a Tabela 3 é

$$y_p = A\cos 2x + B\ sen\ 2x. \qquad (3.24)$$

Logo, $y_p'(x) = -2A\ sen\ 2x + 2B\cos 2x$ e $y_p''(x) = -4A\ cos\ 2x — 4B\ sen\ 2x$. Substituindo esses valores na equação obtemos $-2(A\cos 2x + B\ sen\ 2x) = sen\ 2x$ ou equivalente $(2B - 6A)\ sen\ 2x + (-6A - 2B)\cos 2x = (1)sen\ 2x + (0)\cos 2x$. Identificando os coeficientes obtemos o seguinte sistema $\begin{cases} 2B - 6A = 1 \\ -6A - 2B = 0 \end{cases}$. Resolvendo o

sistema obteremos $A = \frac{1}{20}$ e $B = -\frac{3}{20}$. Substituindo esses valores em (3.24) obteremos a seguinte função partícula da EDO não-homogênea $y_p = \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{3}{20}\ sen\ 2x$. Assim, a solução geral da EDO será $y(x) = \frac{1}{20}cos\ 2x - \frac{3}{20}\ sen\ 2x + c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$.

Veremos agora no Exemplo 3.15, que a forma suposta da solução particular duplica uma solução da equação homogênea associada, ou seja, y_p irá fazer parte da função complementar y_c, mas por uma manipulação algébrica podemos adulterar esse resultado.

Se a forma suposta da solução duplica uma solução da equação homogênea associada, então, devemos modificar a sua hipótese multiplicando a suposta solução particular pela variável independente *x*. Em algumas situações, essas modificações não serão suficientes (como acontecerá no próximo exemplo) para remover todas as duplicações das soluções da EDO homogênea, caso em que é necessário, multiplicar por *x* uma segunda vez. Para uma EDO de segunda ordem, nunca é necessário continuar esse processo. (Boyce e Diprima, 2001, p. 93).

Exemplo 3.15: Resolva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$. Resolução: Como vimos anteriormente, a função complementar é $y_c = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$. Analisando as entradas 3 e 7 da tabela, a escolha usual para uma solução particular seria $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{3x}$, e pelo princípio de superposição $y_p = y_{p1} + y_{p2}$, onde $y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$ e $y_{p2} = De^{3x}$. Entretanto, inspecionando essas funções, vemos que um termo em y_{p2} coincide com um termo de y_c. Se multiplicarmos y_{p2} por *x*, notamos que o termo xe^{3x} é ainda parte de y_c. Mas multiplicando y_{p2} por x^2eliminamos todas as duplicações. Logo, a forma eficaz de uma solução particular é $y_p = Ax^2 + Bx + C + Dx^2e^{3x}$.

Derivando esta última equação duas vezes, substituindo esses resultados na EDO e agrupando os termos, obtemos,

$$y_p'' - 6y_p' + 9y_p = 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2De^{3x}$$
$$= 6x^2 + 2 - 12e^{3x}.$$

Segue-se dessa identidade que $A = \frac{2}{3}, B = \frac{8}{9}, C = \frac{2}{3}$, e $D = -6$. Portanto, a solução geral $y = y_c + y_p$ é $y(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{2}{3} - 6x^2e^{3x}$.

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Veremos agora nesta seção outro método para determinar uma solução particular de (3.5). Diferente do método dos coeficientes indeterminados o método da variação de parâmetros não se restringe a apenas algumas funções ou combinações lineares das mesmas, ele se aplica a todas as equações lineares.

Consideramos a EDO linear de segunda ordem não-homogênea (3.5), ou seja, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, onde p, q e f são funções continuas dadas. Vamos supor que conhecemos a função complementar $y_c(x)$, que tem a forma $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

A principal ideia para acharmos uma função (solução) particular $y_p(x)$ de (3.5) é escrevermos ela da mesma forma da função complementar, só que transformando os coeficientes c_1 e c_2 em funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ respectivamente, ou seja,

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \tag{3.25}$$

O problema agora se resume em encontrar as funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Derivando (3.25), temos

$$y'(x) = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{3.26}$$

Vamos igualar a zero a soma dos termos envolvendo $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$, ou seja, vamos supor que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{3.27}$$

Logo a equação (3.26) se resume a

$$y_p'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{3.28}$$

Derivando (3.28) obtemos,

$$y_p''(x) = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x). \tag{3.29}$$

Agora, Substituindo (3.25), (3.28) e (3.29) na equação (3.5), e já agrupando os termos $u_1(x)$ e $u_2(x)$ teremos

$$u_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(t)y_1(x)] + u_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(t)y_2(x)] + u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Observamos que cada uma das expressões entre colchetes da última equação é nula, pois ambas as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO homogênea (3.6). Logo, teremos apenas

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{3.30}$$

As Equações (3.27) e (3.30) formam um sistema de duas equações lineares algébricas, para as derivadas $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$ das funções desconhecidas,

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}. \tag{3.31}$$

Temos que resolver o sistema para descobrir quem são as "incógnitas" $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$. Vamos fazer isso pela regra de Cramer.

Seja A a matriz dos coeficientes de (3.31), assim

$$\det A = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x). \quad (3.32)$$

Logo, $\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -y_2(x)f(x)$ e $\det A_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = y_1(x)f(x)$. Então, pela regra de Cramer teremos as respectivas soluções

$$u_1'(x) = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad u_2'(x) = \frac{\det A_2}{\det A}. \quad (3.33)$$

Observamos que $\det A = W\big(y_1(x), y_2(x)\big)$, ou seja, $\det A$ é o wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Notamos ainda que a divisão por *W* é permitida, pois como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO homogênea (3.6) então elas são LI, e segue que o wronskiano não se anula. Podemos reescrever (3.33) como sendo,

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}, \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}. \quad (3.34)$$

Integrando (3.34) encontraremos as funções desejadas $u_1(x)$ e $u_2(x)$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}\,dx + c_1,\ u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}\,dx + c_2. \quad (3.35)$$

Finalmente, substituindo (3.35) em (3.25), obtemos uma solução particular para (3.5). Vejamos agora esse resultado enunciado como um teorema (Boyce e Diprima, 2001, p.98).

Teorema 3.8

Se as funções p, q e f são contínuas em um intervalo aberto *I* e se as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da EDO homogênea (3.6) associada a EDO não-homogênea (3.5), então uma solução particular da equação (3.5) é

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1(x),y_2(x))}\,dx \quad (3.36)$$

e sua solução geral é

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x). \quad (3.37)$$

Exemplo 3.16: Resolva $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. Resolução: Notemos que a equação homogênea associada da EDO não-linear é $y'' - 2y' + y = 0$, cuja solução geral é $y_c(x) = c_1e^x + c_2xe^x$.

Agora, para obtermos uma solução particular $y_p(x)$ da EDO, não podemos usar o método dos coeficientes, pois $\frac{e^x}{x}$ não é contínua em $x = 0$, assim temos que usar o método da variação de parâmetros, discutido nessa seção. Sendo $u_1(x)$ e $u_2(x)$ os parâmetros variáveis teremos,

$$y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x. \tag{3.38}$$

Lembrando que $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$ e $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Decorre de (3.27) e de (3.30) o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_1'(x)e^x + u_2'(x)xe^x = 0 \\ u_1'(x)e^x + u_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}. \end{cases} \tag{3.39}$$

Resolvendo esse sistema pela regra de Cramer obtemos,

$$u_1'(x) = -1 \text{ e } u_2'(x) = \frac{1}{x}. \tag{3.40}$$

Integrando as duas equações de (3.40) em ambos os lados da equação e resolvendo-as, obtemos os seguintes valores para $u_1(x)$ e $u_2(x)$: $u_1(x) = \int u_1'(x)\,dx = \int -1\,dx = -x \Rightarrow u_1(x) = -x$ e $u_2(x) = \int u_2'(x)\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) \Rightarrow u_2(x) = \ln(x)$.

Substituindo os valores encontrados dos parâmetros variáveis $u_1(x)$ e $u_2(x)$ em (3.38), vem $y_p = -xe^x + \ln(x)xe^x$. Assim, teremos a seguinte solução geral da EDO dada:

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + \ln(x)\,xe^x \\ &= c_1e^x + (c_2 - 1)xe^x + \ln(x)\,xe^x \\ &= c_1e^x + c_3xe^x + \ln(x)\,xe^x, \end{aligned}$$

com $(c_2 - 1) = c_3$.

APLICAÇÕES DE EDOS NA MODELAGEM DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Veremos nesse capítulo aplicações de EDOs em alguns circuitos elétricos. Antes de entrarmos na aplicação propriamente dita, veremos alguns conceitos, e elementos de eletricidade para nos auxiliar no nosso estudo de aplicação.

ELEMENTOS DE UM CIRCUITO

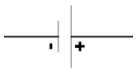
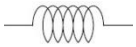
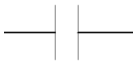
Um circuito elétrico é um modelo matemático que se comporta aproximadamente como um sistema elétrico real (Nilsson e Susan, 2008, p. 3).

A ideia principal de um circuito é ter cargas em movimento que podem constituir um caminho fechado. Um caminho fechado para uma carga em movimento se chama circuito.

Resolver um circuito é calcular as correntes nele. No nosso estudo analisaremos circuitos no qual suas correntes variam com o tempo.

Em um circuito elétrico podem existir alguns elementos que possuem características e funções próprias para o mesmo. Vejamos na tabela abaixo, as grandezas envolvidas nos circuitos do nosso estudo, com algumas informações importantes:

Tabela 4. Elementos de Eletricidade.

Grandeza	Símbolo	Unidade
f.e.m. (força eletromotriz)		volt (V)
Indutância		henry (H)
Capacitância		farad (F)
Resistência		ohm (Ω)
Corrente		ampère (A)
Carga		coulomb (C)

FORÇA ELETROMOTRIZ

Uma força eletromotriz (f.e.m.) é qualquer dispositivo que aumenta a energia potencial das cargas que circulam no circuito (Serway e Jewett, 1996, p.121).

De uma maneira bem intuitiva a f.e.m. indica a energia fornecida (pela bateria ou gerador) aos elétrons.

Vejamos agora a definição de Força Eletromotriz:

Definição 4.1 Força Eletromotriz

A força eletromotriz ε de uma fonte (geradores, baterias e etc.) é o trabalho dW, ou seja, a energia recebida, por unidade de carga dq, que a fonte realiza para transferir cargas do terminal de baixo potencial para o terminal de alto potencial. Definimos a f.e.m. da fonte através desse trabalho:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}. \qquad (4.1)$$

Antes de definirmos os outros elementos dos circuitos precisamos destacar algumas observações referente a f.e.m..

Se tratando de uma fonte real, quando um elétron está inserido na fonte, ele recebe certa quantidade de energia. Entretanto uma pequena fração de energia é dissipada dentro da própria fonte. Assim quando o elétron sai da fonte, sua energia é menor do que a energia recebida. A energia real, na qual o elétron sai e está sujeito, é chamada de Diferença de Potencial (d.d.p.).

A definição da d.d.p. é praticamente a mesma que a Definição 4.1. O que muda é que a f.e.m. nos indica a energia que o elétron recebeu, enquanto que a d.d.p. nos indica qual a energia com que o mesmo saiu.

Nesse estudo vamos considerar uma fonte ideal, isto é, uma fonte na qual a energia do elétron não se dissipa na própria fonte, mas sim nos outros elementos do circuito do nosso estudo (resistores, capacitores e indutores).

> Para produzir uma corrente estável precisamos de uma "bomba" de cargas, um dispositivo que, realizando trabalho sobre os portadores de carga, mantenha uma diferença de potencial entre dois terminais. Um dispositivo desse tipo é chamado de **fonte de tensão,** ou simplesmente **fonte**. Dizemos que uma fonte de tensão produz uma **força eletromotriz** ε, o que significa que submetemos os portadores de carga a uma diferença de potencial (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 167).

CORRENTE ELÉTRICA

A f.e.m. é responsável por gerar a corrente elétrica no circuito. A corrente elétrica é o movimento ordenado das partículas com cargas elétricas.

São inúmeros os efeitos da corrente elétrica, por exemplo, nas instalações elétricas prediais e residenciais, tendo uma corrente elétrica, a lâmpada se acende e se aquece com certa intensidade. Outro exemplo está ligado a um fenômeno natural, o raio é uma corrente elétrica que pode existir entre nuvens ou entre nuvens e o solo.

Por convenção, o sentido da corrente em circuitos elétricos é oposto ao movimento dos elétrons. A seta da corrente é desenhada no sentido em que portadores de carga positivos se moveriam, mesmo que os portadores sejam negativos e se movam no sentido oposto (Halliday, Resnick e Walker,2009, p. 142).

Definição 4.2 Corrente Elétrica

Se uma carga dq passa para um plano hipotético em um intervalo de tempo dt a corrente I nesse plano é definida como

$$i = \frac{dq}{dt}. \qquad (4.2)$$

RESISTÊNCIA

Podemos observar que quando ligamos certos fios condutores a uma mesma fonte, normalmente é de se esperar uma diferença de correntes nesses fios condutores. A ideia da resistência está ligada a dificuldade que a corrente apresenta em sua passagem pelo condutor. Um condutor cuja função em um circuito é oferecer certo tipo de resistência é chamado de **resistor.**

Vejamos a definição a seguir sobre Resistência (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 147):

Definição 4.3 Resistência

Medimos a resistência entre dois pontos de um condutor aplicando uma d.d.p. V $(V = \varepsilon)$ entre esses pontos e medindo a corrente I resultante. A resistência R é dada por

$$R = \frac{\varepsilon}{i}. \quad (4.3)$$

CAPACITÂNCIA

O capacitor é um dispositivo que é usado para armazenar energia elétrica. Duas placas isoladas entre si, uma terá uma carga $+Q$ e outra $-Q$, e ambas terão o mesmo valor absoluto. Esse é a característica básica de qualquer capacitor.

São os capacitores, por exemplo, que armazenam a energia para se ter o flash com o brilho intenso de uma câmara fotográfica, pois, por si só, as baterias (pilhas) não têm energia suficiente para serem usadas diretamente, devido ao fato de que a mesma, só oferecer energia aos poucos.

A quantidade de carga que um capacitor consegue armazenar é chamada de capacitância. A capacitância é uma medida da quantidade de carga que precisa ser acumulada nas placas para produzir uma d.d.p. entre elas.

Vejamos a definição a seguir sobre Capacitância (Tipler e Mosca, 2009, p.109):

Definição 4.4 Capacitância

A razão da carga q pela d.d.p. V $(V = \varepsilon)$ entre os dois condutores é denominada de capacitância do capacitor:

$$C = \frac{q}{\varepsilon}. \quad (4.4)$$

INDUTÂNCIA

A indutância é um parâmetro do circuito utilizado para descrever o indutor.

O indutor é um elemento do circuito sujeito a uma d.d.p. que pode ser utilizado para produzir um campo magnético desejado e armazenar energia nele. O indutor é representado graficamente por uma espiral (fio enrolado).

> Um indutor é um componente elétrico que se opõe a qualquer alteração na corrente elétrica. É composto de um condutor espiral, enrolado em um núcleo de suporte cujo material pode ser magnético ou não-magnético. O comportamento dos indutores é baseado nos fenômenos associados a campos magnéticos. A fonte do campo magnético são cargas em movimento, ou corrente elétrica. Se a corrente variar com o tempo, o campo magnético variará com o tempo. Um campo magnético que varia com o tempo induz uma tensão em qualquer condutor imerso no campo. O parâmetro indutância relaciona a tensão induzida com a corrente (Nilsson e Susan, 2008, p. 131).

Se a corrente que atravessa o indutor varia, logo o fluxo magnético no núcleo das espiras também irá variar, e pela lei de Faraday ocorrerá uma f.e.m. induzida ε_L no indutor. Isso se chama auto-indução, e a f.e.m. induzida ε_L recebe o nome de f.e.m. auto-induzida.

Definição 4.5 Indutância

A indutância L de um indutor é uma constante relacionada com a d.d.p. V ($V = \varepsilon_L$) e com a taxa de variação da intensidade da corrente elétrica em relação ao tempo:

$$\varepsilon_L = L\frac{di}{dt}. \qquad (4.5)$$

LEIS KIRCHHOFF

Existem duas leis clássicas de Kirchhoff (Halliday, Resnick e Walker,2009, p. 170,176):

Lei das tensões (Regra das malhas)

A soma algébrica das diferenças de potencial em uma malha fechada é zero.

Lei das correntes (Regra dos nós)

A soma algébrica das intensidades de corrente elétrica que chegam em um nó de um circuito elétrico é igual à soma algébrica das intensidades de corrente elétrica que saem do mesmo nó neste circuito elétrico.

No restante desse capítulo apresentamos a modelagem de alguns circuitos elétricos em série, utilizando EDOs. Estes estudos foram baseados nas referências Halliday, Resnick e Walker (2009), Nilsson e Susan (2008), Serway e Jewett (1996) e Tipler e Mosca (2009).

CIRCUITOS *RC* EM SÉRIE

Consideramos um circuito em série com uma f.e.m. ε, uma resistência R, uma capacitância C e uma chave S. Na Figura 4.1 a chave S está aberta, ou seja, o circuito não está fechado, o que resulta na ausência da corrente elétrica i. Entretanto quando a chave é ligada no ponto a, o capacitor C começa a ser carregado através do resistor R, pela corrente i. Depois que o capacitor está totalmente carregado, a chave S é deslocada para o ponto b, descarregando assim o capacitor.

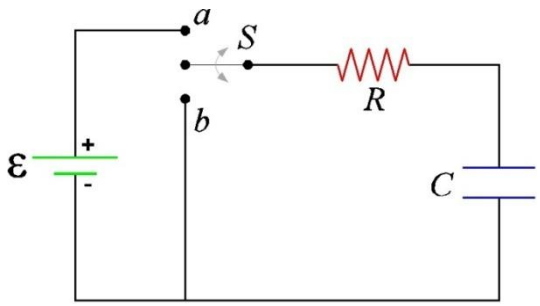


Figura 4.1. Circuito *RC* aberto.

Analisaremos matematicamente o circuito *RC* quanto ao carregamento do capacitor e seu descarregamento, modelando suas EDOs na variável tempo, onde nos preocuparemos com o interesse de sabermos o valor da carga e da corrente no instante *t*.

CARREGANDO UM CAPACITOR

Admitiremos que o capacitor esteja inicialmente descarregado.

Se a chave for fechada para o ponto *a* (Figura 4.2) no instante $t = 0$, a carga começa a fluir, e se estabelece uma corrente no circuito, dando inicio ao carregamento do capacitor.

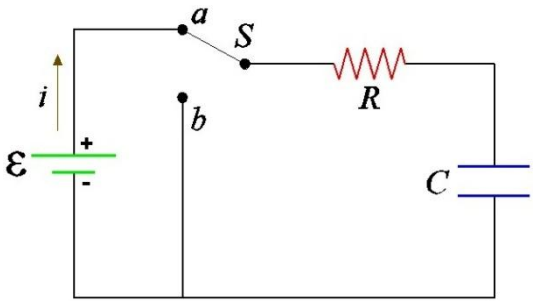


Figura 4.2. Circuito *RC* fechado em *a*.

Observamos que, durante esse processo de carregamento, as cargas não passam através do capacitor, pois o espaço entre as placas constitui uma interrupção no circuito. O que acontece na verdade é a transferência de cargas de uma para outra placa através do resistor, da chave e da bateria, até que o capacitor adquira a plena carga. O valor da carga máxima depende da f.e.m. da bateria. Uma vez atingida esta carga máxima, a corrente no circuito é nula.

A fim de fazer uma discussão quantitativa, vamos aplicar a regra das malhas de Kirchhoff, ao circuito depois de a chave ter sido fechada. Isto nos dá

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0,. \qquad (4.6)$$

onde *i*R é a queda de potencial no resistor, e q/C a queda de potencial no capacitor. Observe que *q* e *i* são valores instantâneos da carga e da corrente, respectivamente, durante o processo de carga do capacitor.

Podemos usar a equação (4.6) para achar a corrente inicial no circuito e a carga máxima no capacitor. Em $t = 0$ quando a chave é fechada, a carga do capacitor é zero, e pela equação (4.1), vemos que a corrente inicial no circuito i_0 é no máximo e igual a

$$i_0 = \frac{\varepsilon}{R} \text{ (corrente em } t = 0). \tag{4.7}$$

No instante em que a chave *S* é fechada a queda de potencial ocorre inteiramente no resistor. Depois, quando o capacitor estiver com a sua carga máxima *Q*, cessa o movimento das cargas, a corrente no circuito é nula, e a queda de potencial ocorre inteiramente no capacitor. A substituição de $i = 0$ na equação (4.6) nos dará a seguinte expressão para *Q*:

$$Q = C\varepsilon \text{ (carga máxima)}. \tag{4.8}$$

ou seja, a equação (4.8) indica que essa carga é a carga de saturação do capacitor.

A fim de determinar a expressão analítica da dependência temporal da carga e da corrente, devemos resolver a equação (4.6), uma equação com duas variáveis com *q* e *i*. Para efetuar esta resolução, vamos derivar a equação (4.1) em relação ao tempo

$$\frac{d}{dt}\left(\varepsilon - iR - \frac{q}{C}\right) = \frac{d}{dt}(0) \Rightarrow 0 - R\frac{di}{dt} - \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0.$$

Lembrando que $i = \frac{dq}{dt}$, podemos reescrever a última equação como sendo

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \tag{4.9}$$

Essa última expressão é uma EDO de primeira ordem, a qual se encaixa na classe de variáveis separáveis da secção 2.2.1 do Capítulo 2. Logo podemos reescrevê-la como sendo

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}dt. \tag{4.10}$$

Basta agora resolvermos essa equação para acharmos a corrente em função do tempo, tendo como o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}dt \\ i(0) = i_0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Uma vez que *R* e *C* são constantes, (4.10) pode ser integrada em ambos os lados. Assim

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}\int dt$$

$$ln(i) = -\frac{t}{RC} + k$$

onde *k* é a constante de integração. Aplicando a exponencial em ambos os lados dessa última expressão, teremos

$$e^{ln(i)} = e^{(-t/RC)+k}$$

$$i = e^{-t/RC}e^{k},$$

como e^{k} é uma constante, podemos trocá-la por outra constante generalizada qualquer. Tomando $w = e^{k}$, e substituindo-o na última expressão, obtemos a seguinte solução geral de (4.9):

$$i = we^{-t/RC}. \tag{4.12}$$

Aplicando o PVI em (4.12), $i = we^{-t/RC} \Longrightarrow i_0 = we^{0} \Longrightarrow i_0 = w,$ teremos a seguinte solução particular de (4.9)

$$i = i_0 e^{-t/RC}. \tag{4.13}$$

Substituindo (4.7) em (4.13) chegamos na seguinte expressão para a corrente do circuito no instante t:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}. \tag{4.14}$$

Fazendo uma análise temporal da equação (4.14):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}$;
- Quando $t \longrightarrow \infty \Rightarrow i \longrightarrow 0$.

Isso demonstra a característica de um capacitor em um circuito elétrico. Quando $t = 0$ é como se o capacitor não existisse, ou seja, é como se ele fosse apenas um fio. Entretanto, quando $t \longrightarrow \infty$ é como se o capacitor fosse uma "chave aberta" para o circuito, interrompendo assim a corrente elétrica.

Vamos achar agora a carga no capacitor em função do tempo. Substituindo $i(t) = \frac{dq}{dt}$ na equação (4.14), temos a seguinte EDO separável:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}. \tag{4.15}$$

Podemos reescrever (4.15) da mesma forma que a modelagem anterior. Separando as variáveis *q* e *t* obtemos,

$$dq = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}\,dt \tag{4.16}$$

que está sujeita ao seguinte PVI:

$$\begin{cases} dq = \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}\,dt \\ q(0) = 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Integrando (4.16) em ambos os lados da equação teremos

$$\int dq = \int \frac{\varepsilon}{R}e^{-t/RC}\,dt.$$

Para integrarmos o segundo membro desta expressão, usamos a relação bem conhecida $\int e^{-\alpha x}\, dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}$, com isso

$$\int dq = \int \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}\, dt$$

$$q = -RC\frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} + k.$$

De onde chegamos, na seguinte solução geral de (4.15)

$$q = -C\varepsilon e^{-t/RC} + k \tag{4.18}$$

onde *k* é a constante de integração.

Aplicando o PVI em (4.18)

$$0 = -C\varepsilon e^{-0/RC} + k$$

$$0 = -C\varepsilon + k$$

$$C\varepsilon = k. \tag{4.19}$$

Substituindo (4.19) em (4.18) obtemos a seguinte solução particular de (4.15):

$$q = -C\varepsilon e^{-t/RC} + C\varepsilon$$

$$q = C\varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right) \tag{4.20}$$

Substituindo (4.8) em (4.20) teremos a seguinte expressão para o carregamento do capacitor no instante t*:*

$$q(t) = Q\left(1 - e^{-t/RC}\right). \tag{4.21}$$

Podemos fazer uma análise temporal da equação (4.21), confirmando matematicamente o que foi dito anteriormente sobre a carga do capacitor:

- Quando $t = 0 \Rightarrow q = 0$;
- Quando $t \longrightarrow \infty \Rightarrow q \longrightarrow Q$

O produto *RC* que aparece nas Equações (4.14) e (4.21) tem dimensão de tempo e recebe um nome especial. Tal produto é chamado de constante de tempo capacitiva, que cuja representação é a letra grega τ (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 183):

$$\tau = RC. \tag{4.22}$$

Notemos que se substituirmos no instante $t = \tau = RC$ na equação (4.14), obtemos

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{RC}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-1} \cong 0{,}37\frac{\varepsilon}{R}.$$

Isso significa que no instante τ (a primeira constante de tempo) a corrente decaiu 37% do seu valor (Figura 4.3). Do mesmo modo, se substituirmos no instante $t = \tau = RC$ na equação (4.21) obtemos: $q(t) = Q\left(1 - e^{-(RC)/RC}\right) = Q(1 - e^{-1}) \cong 0{,}63Q$

Isso significa que no instante τ (a primeira constante de tempo) a carga do capacitor aumentou de 0 a 63% do seu valor final (Figura 4.4).

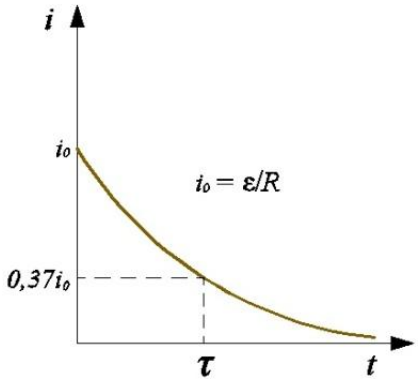


Figura 4.3. Corrente no circuito durante o carregamento do capacitor.

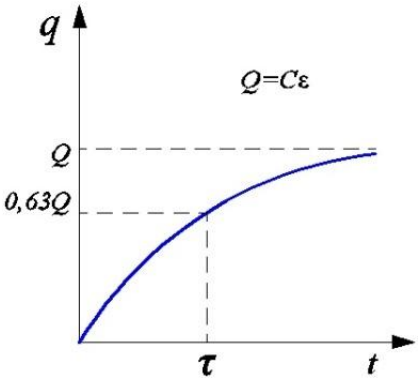


Figura 4.4. Carga do capacitor durante o carregamento do capacitor.

Podemos reescrever a equação (4.4) como sendo

$$q = CV \tag{4.23}$$

e substituindo (4.23) em (4.20) $CV(t) = C\varepsilon\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ ou $V(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right)$, obtemos a seguinte expressão para a d.d.p. entre as placas do capacitor durante o processo de carregamento

$$V_c(t) = \varepsilon\left(1 - e^{-t/RC}\right). \tag{4.24}$$

Fazendo a analise temporal da equação (4.24):

- Quando $t = 0 \Rightarrow V_c = 0$
- Quando $t \longrightarrow \infty \Rightarrow V_c \longrightarrow \varepsilon$.

DESCARREGANDO UM CAPACITOR

Vamos considerar agora que o capacitor da Figura 4.2 esteja totalmente carregado. Com isso, a carga inicial do capacitor é a sua carga máxima Q_0, onde na placa superior temos a carga

$+Q_0$ e na placa inferior temos $-Q_0$. Como vimos anteriormente, o valor inicial da d.d.p. V_0 do capacitor se iguala com a da f.e.m. ε do circuito.

Supondo que em um novo tempo $t = 0$ a chave *S* da Figura 4.2, seja deslocada do ponto *a* para o ponto *b*, iniciando assim, o processo de descarga do capacitor através da resistência *R*. Vejamos isso na figura abaixo

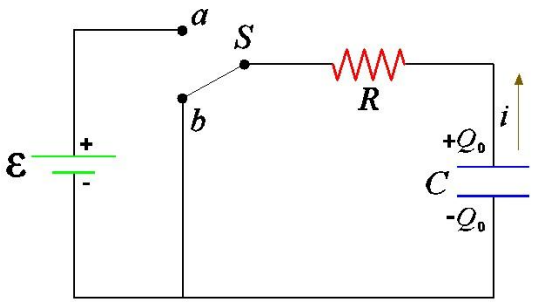


Figura 4.5. Circuito *RC* fechado em b.

Vamos agora achar primeiro a expressão temporal da carga, para depois acharmos a corrente. Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff ao circuito depois de a chave ter sido fechada, teremos

$$iR + \frac{q}{C} = 0. \tag{4.25}$$

Lembrando que a f.e.m. ε agora é nula, pois ela não esta mais no circuito e por isso igualamos essa última a zero.

Substituindo (4.2) em (4.5) obtemos a seguinte EDO:

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \tag{4.26}$$

A equação (4.26) é uma EDO de primeira ordem de variáveis separáveis. Separando suas variáveis, teremos

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}.$$

Como já vimos anteriormente, a solução geral de (4.26) será

$$q = e^{-t/RC}e^{k}.$$

Basta agora acharmos a solução particular de (4.26) para definirmos a expressão quantitativa da carga em função do tempo. O PVI, durante o descarregamento do capacitor é:

$$\begin{cases} R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \\ q(0) = Q_0. \end{cases} \tag{4.27}$$

Resolvendo (4.27), achamos a seguinte expressão para a carga em função do tempo, referente ao descarregamento do capacitor no circuito:

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC}. \tag{4.28}$$

Lembrando que, $Q_0 = CV_0$ é a carga inicial e máxima do capacitor.

Fazendo a análise temporal da equação (4.28):

- Quando $t = 0 \Rightarrow q = Q_0$
- Quando $t \longrightarrow \infty \Rightarrow q \longrightarrow 0.$

Para acharmos a expressão para a corrente, basta derivarmos (4.28) em relação ao tempo, desse modo teremos $\frac{d(q)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Q_0 e^{-t/RC}\right)$. Notemos que, o lado esquerdo dessa última é a corrente *i*. Logo substituindo $i(t) = \frac{dq}{dt}$, e derivando o lado direito, chegaremos na seguinte expressão: $i(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$. O sinal negativo representa a ideia da direção oposta da corrente, em relação ao carregamento do capacitor.

Na análise posterior que faremos da equação (4.29), notaremos que a corrente inicial do circuito é $i_0 = \frac{Q_0}{RC}$. Assim, teremos a seguinte expressão para a corrente no instante *t* durante a descarga do capacitor:

$$i(t) = -i_0 e^{-t/RC}. \tag{4.29}$$

Fazendo a analise temporal da equação (4.29):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = -\frac{Q_0}{RC}$ (corrente inicial)
- Quando $t \longrightarrow \infty \Rightarrow i \longrightarrow 0.$

Podemos observar que a carga no capacitor (Figura 4.6) governada pela equação (4.28) e da corrente (Figura 4.7) governada pela equação (4.29), decrescem exponencialmente a uma taxa caracterizada pela constante tempo $\tau = RC$. Vejamos abaixo esses gráficos:

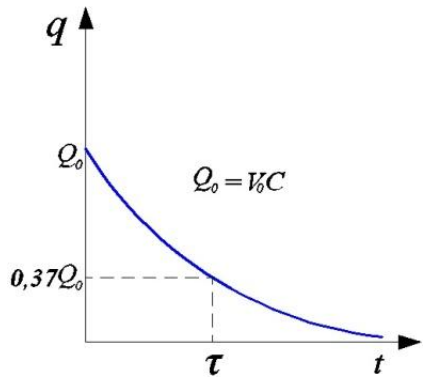


Figura 4.6. Carga do capacitor durante o descarregamento do capacitor.

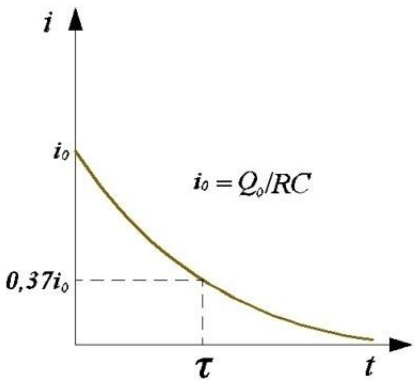


Figura 4.7. Corrente no circuito durante o descarregamento do capacitor.

CIRCUITOS *RL* EM SÉRIE

Consideramos um circuito em série com uma força eletromotriz ε, um resistor de resistência *R*, um indutor com uma indutância *L* e uma chave *S*. Na figura 4.7 a chave *S* está aberta, ou seja, o circuito não está fechado, o que resulta na ausência da corrente elétrica i.

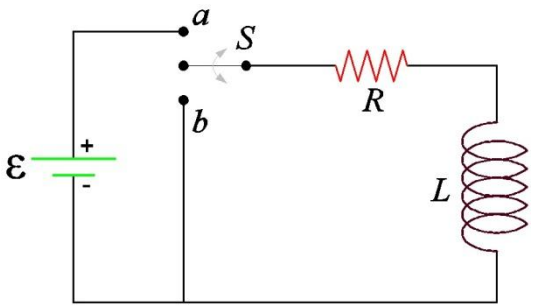


Figura 4.7. Circuito *RL* aberto.

Quando a chave *S* é deslocada para o ponto *a* (Figura 4.8), com a presença do indutor, uma f.e.m. $\varepsilon_L = L\, di/dt$ auto-induzida aparece no circuito, cuja polaridade é oposta à f.e.m. da fonte ε. Nessa situação, e de acordo com a lei de Lenz, ε_L vai se opuser ao aumento da corrente no circuito. Assim a corrente *i* fica no meio desse jogo entre a d.d.p. da fonte e a da induzida.

Com o passar do tempo a d.d.p. ε_L diminui, aumentando assim a corrente *i* através do resistor *R*, chegando à expressão máxima ε/R.

Se removermos bruscamente a fonte ε do circuito da Figura 4.8, deslocando a chave *S* para a posição b (Figura 4.10), depois que a corrente já está no seu valor máximo, a corrente irá diminuir, mas não instantaneamente. Desse modo a corrente no resistor cai para zero gradativamente.

Generalizando, inicialmente o indutor se opõe a qualquer variação da corrente que o atravessa. Após um tempo suficientemente longo ele se comporta como um fio comum

(Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 281). Depois que retiramos bruscamente a f.e.m. do circuito, a corrente tenderá a zero com o passar do tempo.

Vamos determinar agora a expressão analítica da dependência temporal da corrente no circuito *RL*, quando a chave *S* da Figura 4.7 é deslocada para o ponto a. Vejamos a figura abaixo:

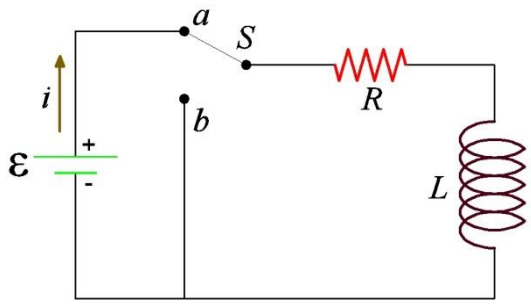


Figura 4.8. Circuito *RL* fechado em a.

Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff, depois de a chave ter sido fechada teremos a seguinte EDO já remanejada:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon. \tag{4.30}$$

A equação (4.30) é uma EDO linear de primeira ordem. Podemos resolvê-la da mesma maneira como foi apresentada na secção 2.2.4. Colocando-a na forma (2.34) obtemos

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\varepsilon}{L}. \tag{4.31}$$

O fator integrante $\mu(t)$ de (4.31) será $\mu(t) = e^{t.R/L}$. Multiplicando (4.31) pelo fator integrante obtemos,

$$e^{t.R/L}\left(\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i\right) = e^{t.R/L}\left(\frac{\varepsilon}{L}\right)$$

$$e^{t.R/L}\frac{di}{dt} + e^{t.R/L}\frac{R}{L}i = e^{t.R/L}\frac{\varepsilon}{L}.$$

Como sabemos essa última expressão resulta em

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t.R/L}i\right) = e^{t.R/L}\frac{\varepsilon}{L}. \tag{4.32}$$

Integrando (4.32) em ambos os membros da equação e isolando *i*, obtemos

$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{t.R/L}i\right)dt = \int e^{t.R/L}\frac{\varepsilon}{L}dt$$

$$e^{t.R/L}i = \frac{\varepsilon}{L}\int e^{t.R/L}\,dt$$

$$e^{t.R/L}i = \frac{\varepsilon}{R}e^{t.R/L} + k$$

Chegamos então na solução geral de (4.30)

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} + ke^{-t.R/L}. \tag{4.33}$$

Resolvendo o PVI dado, cuja condição inicial é $i(0) = 0$, obteremos

$$k = -\frac{\varepsilon}{R}. \tag{4.34}$$

Substituindo (4.34) em (4.33) teremos a expressão para a corrente no circuito instante t:

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-t.R/L}\right). \tag{4.35}$$

Fazendo a analise temporal da equação (4.35):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = 0$ (corrente inicial)
- Quando $t \longrightarrow \infty \Rightarrow i \longrightarrow \frac{\varepsilon}{R}$.

A constante de tempo τ para o circuito *RL* é dada por

$$\tau = \frac{L}{R}, \tag{4.36}$$

e, é chamada de constante de tempo indutiva (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 282).

Da mesma maneira como discutimos no circuito *RC*, τ tem dimensão de tempo. Se substituirmos (4.36) em (4.35) obtemos

$$i\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{L}{R}\cdot\frac{R}{L}}\right) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-1}) \cong 0{,}63\frac{\varepsilon}{R}.$$

Logo, a constante de tempo τ no circuito *RL* é o tempo necessário que a corrente *i* precisa para atingir 63% do seu valor final ε/R.

Graficamente temos a curva característica da corrente no circuito da Figura 4.8:

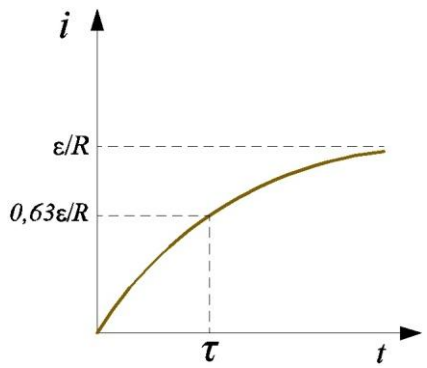


Figura 4.9. Corrente no circuito *RL* com a fonte ε.

Vamos supor agora que depois de a corrente ter atingido seu valor máximo (Figura 4.8), a chave seja deslocada da posição a para a posição b (Figura 4.10). Isso vai fazer com que a f.e.m. seja "desconectada" no circuito.

Para que não haja uma variação brusca da corrente é preciso que a ligação no ponto b seja feita antes de a ligação no ponto a seja interrompida; uma chave capaz de realizar essa operação é chamada de *make-before-breack* (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 283).

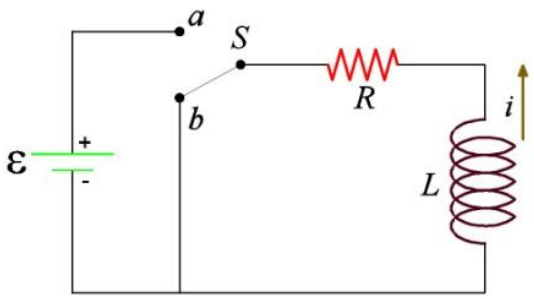


Figura 4.10. Circuito *RL* fechado em b.

Nesse novo momento do circuito, a corrente decresce, mas não instantaneamente e sim exponencialmente.

Segundo a regra das malhas de Kirchhoff, a expressão analítica da dependência temporal do decrescimento da corrente no circuito será:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0. \tag{4.37}$$

Reparamos que (4.37) é quase igual a (4.30) o que muda é que neste caso $\varepsilon = 0$. A equação (4.37) é uma EDO de primeira ordem com variáveis separáveis. Separando suas variáveis obtemos

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt. \tag{4.38}$$

Integrando (4.38) em ambos os membros da equação e resolvendo-a, obtemos

$$\int \frac{di}{i} = \int -\frac{R}{L}\,dt$$

$$ln(i) = -\frac{R}{L}t + k$$

$$e^{ln(i)} = e^{-\frac{R}{L}t+k}$$

$$i = e^{-\frac{R}{L}t+k}$$

$$i(t) = we^{-\frac{R}{L}t}. \tag{4.39}$$

No caso trocamos e^k por w.

Logo, (4.39) é a solução geral de (4.38). Podemos achar agora a solução particular de (4.38). As condições iniciais são $i(0) = \frac{\varepsilon}{R}$, que é a corrente inicial i_0 desse novo momento do circuito. Desse modo, pelo PVI apresentado, temos

$$\frac{\varepsilon}{R} = w = i_0. \tag{4.40}$$

Substituindo (4.40) em (4.39) obtemos a expressão para a diminuição da corrente no circuito da Figura 4.10 no instante t:

$$i(t) = i_0 e^{-t.R/L}. \tag{4.41}$$

Fazendo a analise temporal da equação (4.41):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = i_0$ (corrente inicial)
- Quando $t \longrightarrow \infty \Rightarrow i \longrightarrow 0$.

Graficamente temos a curva característica da corrente no circuito da Figura 4.10:

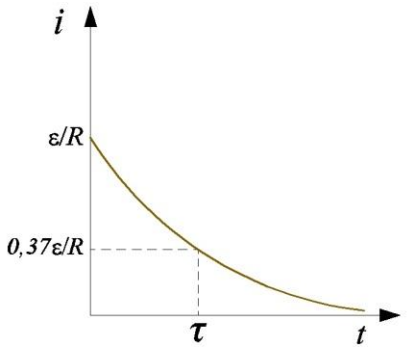


Figura 4.11. Corrente no circuito *RL* sem a fonte ε.

CIRCUITOS *LC* EM SÉRIE

Vamos analisar agora a combinação de dois elementos em um circuito: capacitor e o indutor (Figura 4.12)

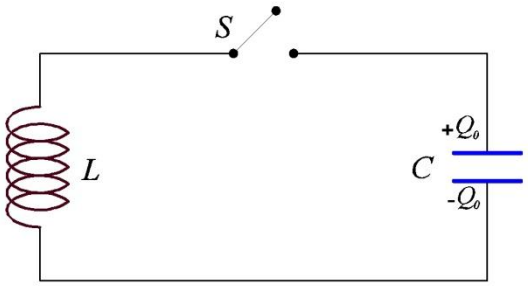


Figura 4.12. Circuito *LC* aberto.

Nesse circuito a carga, a corrente e a d.d.p. não crescem ou decrescem exponencialmente com o tempo. O que acontece são oscilações senoidais com um período T e uma frequência angular ω.

As oscilações que ocorrem no campo elétrico do capacitor e no campo magnético do indutor são chamadas de **oscilações eletromagnéticas** (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 305).

Vamos considerar que o capacitor da Figura 4.12 esteja totalmente carregado com uma carga inicial Q_0. Se fecharmos a chave S (Figura 4.13), uma corrente *i* passara pelo indutor que o qual irá começar a armazenar uma energia.

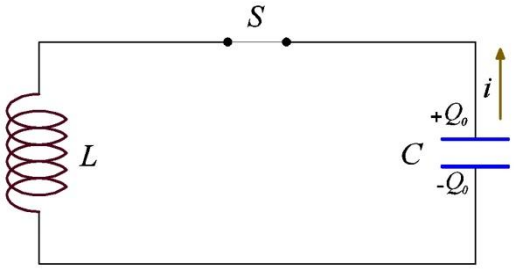


Figura 4.13. Circuito *LC* fechado.

Vamos definir agora as energias que são armazenadas no capacitor e no indutor (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 305).

Definição 4.6 Energia armazenada em um capacitor em qualquer instante
A energia armazenada no campo elétrico de um capacitor com capacitância *C* e com uma determinada carga *q* num certo instante é dada por $$U_E = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.42)$$

Definição 4.7 Energia armazenada em um indutor em qualquer instante
A energia armazenada no campo magnético em um indutor com indutância *L* e com uma determinada corrente *i* num certo instante é dada por $$U_B = \frac{Li^2}{2}. \quad (4.43)$$

A energia *U* total armazenada em qualquer instante em um circuito *LC* oscilante é a energia total no capacitor mais a energia total no indutor em certo instante:

$$U = U_B + U_E. \quad (4.44)$$

Substituindo (4.42) e (4.43) em (4.44) obtemos $U = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$. Derivando essa última em relação ao tempo teremos $\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}\right) \Longrightarrow 0 = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}\frac{dq}{dt}$.

Como $i = \frac{dq}{dt}$ essa ultima equação fica

$$0 = Li\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}i. \quad (4.45)$$

Dividindo (4.45) por *i* em ambos os lados, chegamos em $L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$. Lembrando que $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, podemos reescrever essa última equação, como sendo a seguinte EDO de segunda ordem homogênea que descreve o circuito *LC*:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C}i = 0. \quad (4.46)$$

Como vimos no Capítulo 3, essa última equação é uma EDO linear e homogênea com coeficientes constantes. A equação auxiliar de (4.46) é

$$Lm^2 + \frac{1}{C} = 0. \quad (4.47)$$

Resolvendo (4.47), teremos as seguintes raízes complexas conjugadas

$$m_1 = i/\sqrt{LC}$$
$$m_2 = -i/\sqrt{LC}.$$

Assim, a solução geral de (4.46) se encaixa no Caso 3 da seção 3.3.2. Logo a solução geral de (4.46) é

$$q(t) = c_1 cos\frac{1}{\sqrt{LC}}t + c_2 sen\ \frac{1}{\sqrt{LC}}t. \quad (4.48)$$

Chamando $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, que é a freqüência angular das oscilações no circuito *LC*, e substituindo-a em (4.48), obtemos a seguinte expressão

$$q(t) = c_1 cos\ \omega t + c_2 sen\ \omega t. \quad (4.49)$$

Vamos achar agora a solução particular. Para isso analisamos o PVI do circuito. As condições inicias são:

$$\begin{cases} q(0) = Q_0 \\ q'(0) = 0. \end{cases} \tag{4.50}$$

Derivando (4.49) em relação ao tempo, teremos:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(c_1 cos\ \omega t + c_2 sen \omega t)$$

$$\frac{dq}{dt} = -c_1 \omega\ sen\ \omega t + c_2 \omega\ cos\ \omega t. \tag{4.51}$$

Substituindo $q(0) = Q_0$ em (4.49) temos

$$Q_0 = c_1 cos\ \omega.(0) + c_2 sen\ \omega.(0)$$

$$0 = c_1(1) + c_2(0)$$

$$c_1 = Q_0. \tag{4.52}$$

Substituindo agora (4.52) e $q'(0) = 0$ em (4.51) temos

$$0 = -(Q_0)\omega\ sen\ \omega(0) + c_2 \omega\ cos\ \omega(0)$$

$$0 = c_2 \omega$$

$$c_2 = 0. \tag{4.53}$$

Obteremos assim, a seguinte expressão para a carga no oscilador *LC:*

$$q(t) = Q_0 cos\ \omega t. \tag{4.54}$$

A equação (4.54) nos mostra que Q_0 é a amplitude da carga (Figura 4.14).

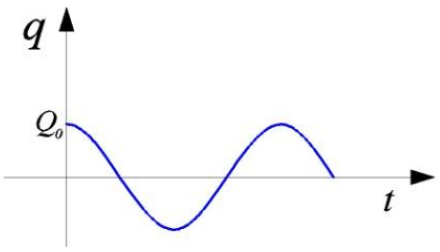


Figura 4.14. Carga no circuito *LC.*

Notemos que a equação (4.51) na verdade é a solução geral da corrente no circuito no instante *t*. Substituindo então (4.52) e (4.53) em (4.51) obteremos a seguinte expressão para a corrente no circuito

$$i(t) = -\omega Q_0 sen\ \omega t. \tag{4.55}$$

A equação (4.55) nos mostra que ωQ_0 é a amplitude da corrente no circuito (Figura 4.15).

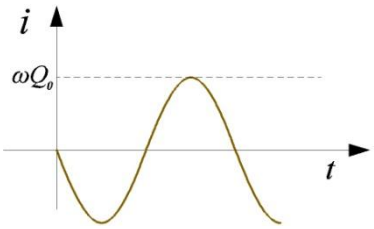


Figura 4.15. Corrente no circuito *LC*.

CIRCUITOS *RLC* EM SÉRIE – OSCILAÇÕES AMORTECIDAS

Um circuito que tem um capacitor, um resistor e um indutor, é chamado de c*ircuito RLC*. Vamos analisar o circuito do tipo da Figura 4.16.

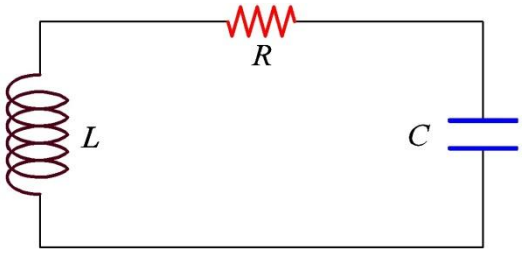


Figura 4.16. Circuito *RLC* amortecido.

Se tivéssemos uma f.e.m. introduzida no circuito da Figura 4.16, as oscilações seriam ditas como forçadas. (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 315).

Nesse caso, a carga no circuito irá oscilar entre o capacitor e o indutor como vimos nos circuitos *LC*. Entretanto certa quantidade de energia é dissipada no resistor, o que resultará progressivamente na diminuição das oscilações. Logo a energia total do circuito não é constante, pois diminui com o tempo. O que nos leva a concluir que as oscilações da carga, da corrente e da d.d.p. diminuem continuamente de amplitude, dizendo assim que as oscilações nesse circuito são *amortecidas*.

Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff no circuito da Figura 4.16, teremos

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = 0. \tag{4.56}$$

Diferenciando (4.56) uma vez em relação ao tempo *t*. Teremos

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = 0. \tag{4.57}$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$, obtemos a seguinte EDO de segunda ordem que descreve o Circuito *RLC* amortecido:

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0. \tag{4.58}$$

Teremos três possibilidades para a solução geral de (4.58). Cada uma dessas possibilidades depende do valor do discriminante da equação auxiliar da mesma abaixo

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{C} = 0. \tag{4.59}$$

As raízes $m_{1,2}$ de (4.59) em função dos elementos do circuito serão:

$$m_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L}.$$

ou

$$m_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\,. \tag{4.60}$$

Chamando

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \text{ e } \delta = \frac{R}{2L},$$

podemos reescrever a equação (4.60) como sendo

$$m_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}. \tag{4.61}$$

A resposta da corrente nesse circuito terá três casos distintos (Nilsson e Riedel, 2008, p. 215): Superamortecida; Subamortecida; Criticamente amortecida.

Caso 1: Superamortecida $(\omega^2 < \delta^2)$

Nesse caso teremos duas raízes distintas negativas e reais m_1 e m_2. Portanto, conforme vimos no Capítulo 3, na secção 3.3.2, a solução geral de (4.58), nesse caso será:

$$i(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}. \tag{4.62}$$

onde c_1e c_2 são constantes arbitrárias. Vejamos o comportamento de (4.62) na Figura 4.17:

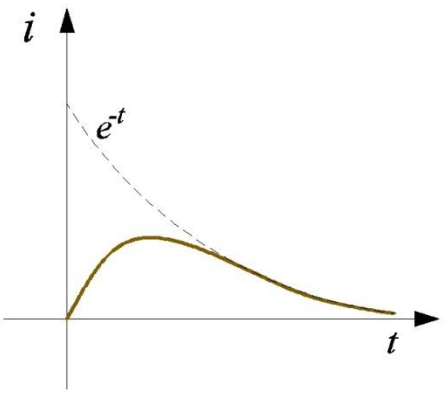


Figura 4.17. Corrente superamortecida.

Podemos notar que a corrente aumenta e depois tende para zero conforme o tempo aumenta.

Caso 2: Subamortecida $(\omega^2 > \delta^2)$

Nesse caso teremos duas raízes complexas conjugadas: $m_1 = -\delta + \omega_d i$ e $m_2 = \delta + \omega_d i$, onde $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$.

Portanto, conforme vimos no Capítulo 3, na secção 3.3.2, a solução geral de (4.58), nesse caso será:

$$i(t) = e^{-t\delta}(c_1 cos\ \omega_d t + c_2 sen\ \omega_d t). \tag{4.63}$$

Vejamos o comportamento de (4.63) na Figura 4.18:

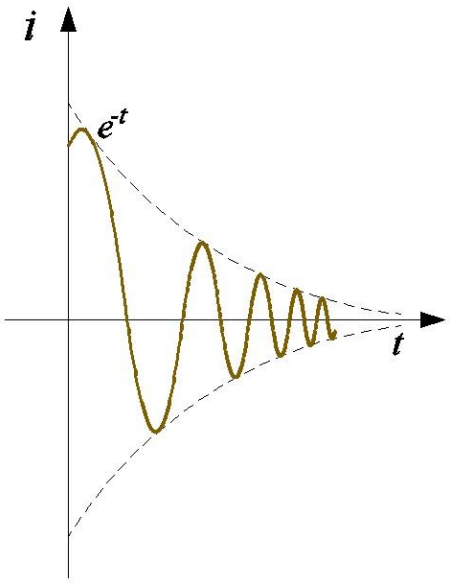


Figura 4.18. Corrente subamortecida.

Podemos notar que a corrente oscila e diminui fortemente tendendo para zero conforme o tempo aumenta.

Coso 3: Criticamente amortecida$(\omega^2 = \delta^2)$

Nesse caso teremos apenas uma raiz real *m*. Essa única raiz terá a seguinte expressão:

$$m = -\frac{R}{2L} = -\delta.$$

Portanto, conforme vimos no Capitulo 3, na secção 3.3.2, a solução geral de (4.58) nesse caso será:

$$i(t) = (c_1 + c_2 x)e^{-\delta t}, \tag{4.64}$$

sendo c_1e c_2, constantes arbitrárias.

Vejamos o comportamento de (4.62) na Figura 4.19:

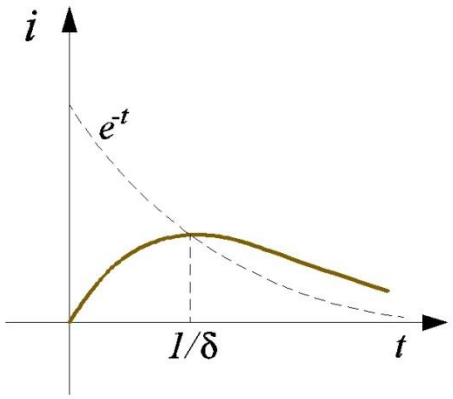


Figura 4.19. Corrente criticamente amortecida.

O comportamento da corrente nesse caso é semelhante com a do primeiro caso. Entretanto nesse caso, a corrente tem um aumento mais significante e demora um pouco mais para ser dissipada.

Assim, vimos como alguns circuitos elétricos simples são modelados por meio de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem. Podendo, com base nas EDOs usadas, estudar o comportamento de alguns componentes desses circuitos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso, com o objetivo de estudar a modelagem de circuitos elétricos, foram estudadas equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem. Foram estudados métodos de resolução de EDOs e suas características. Possibilitando assim a boa compreensão da modelagem dos circuitos elétricos estudados.

Podemos notar a importância das equações diferenciais como ferramentas para resoluções de diversos problemas envolvendo fenômenos físicos, dentre esses estão os circuitos elétricos, objeto do nosso estudo de aplicação.

Notemos ainda que ao modelarmos os circuitos elétricos apontados, precisávamos primeiramente entender como que se comportava o fenômeno físico. As modelagens foram construídas em de acordo com a regra das malhas de Kirchhoff, que serviu de alicerce para as mesmas.

Por isso, entender como um fenômeno físico se comporta e identificar as variáveis relevantes, é fundamental para a modelagem usando as EDOs.

O toque de classe da ciência é a previsibilidade das coisas através da matemática. A previsão que fizemos para saber qual o valor da corrente em um determinado instante, só é mais um dos inúmeros exemplos de modelos matemáticos usando as EDOs.

As equações diferenciais sendo ordinárias ou não, são bons exemplos das interações entre a matemática e as outras ciências e continuam tendo ainda várias aplicações por serem descobertas, pois sempre haverá um fenômeno físico cujo comportamento depende de taxas de variações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bassanezi RC, Ferreira Júnior WC. (1988). Equações diferenciais com aplicações. São Paulo: Harbra Ltda.

Boyce WE, Prima RC (2002). Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 7ª. ed., Rio de Janeiro: LTC.

Edwards Júnior CH, Penney DE (1995). Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno. 3ª. ed., Rio de Janeiro: LTC.

Figueiredo DG, Neves AF (2002). Equações diferenciais aplicadas. 2ª.ed. Rio de Janeiro: IMPA.

Halliday D, Resnick R, Walker J (2009). Fundamentos de física. vol 3. 8ª. ed. Rio de Janeiro: LTC.

Nilsson JW, Riedel AS (2009). Circuitos Elétricos. 8ª. ed. São Paulo: Pearson.

Santos RJ (2010). Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias. Departamento de Matemática – ICEx. Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/existunic.pdf>. Acesso em: 23 out. 2014.

Soclof S (2014). História dos circuitos elétricos. Disponível em: http://tecnologia.hsw.uol.com.br/circuitos3.htm. Acesso em: 20 out. 2014.

Serway RA, Jewett Junior JW (2005). Princípios de física: Eletromagnetismo. vol 3. 3ª. ed. São Paulo: Thomson.

Swokowski EW (1994). Cálculo com geometria analítica. 2ª.ed. São Paulo: Makron Books.

Tipler PA, Mosca G (2009). Física para Cientistas e Engenheiros. vol 1. 6ª.ed. Rio de Janeiro: LTC.

Zill DG, Gullen MR (2001). Equações diferenciais. vol 1. 3ª.ed. São Paulo: Makron Books.

Alan Mario Zuffo

Graduado em Agronomia pela UNEMAT. Mestre em Agronomia - Fitotecnia (Produção Vegetal) UFPI. Doutor em Agronomia - Fitotecnia (Produção Vegetal) UFLA. Pós-Doutorado em Agronomia na UEMS. Prof. UFMS em Chapadão do Sul.

Jorge González Aguilera

Graduado em Agronomia pelo ISCA-B (Cuba). Especialista em Biotecnologia pela Universidad de Oriente (Cuba). Mestrado em Fitotecnia e Doutorado em Genética e Melhoramento pela UFV e Post Doutorado na Embrapa Trigo. Prof. UFMS em Chapadão do Sul.

Bruno Rodrigues de Oliveira

Graduado em Matemática pela UEMS. Mestrado em Engenharia Elétrica UNESP-Ilha Solteira e Doutorado em andamento na mesma instituição. Pesquisador independente.

Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000
Nova Xavantina – Mato Grosso - Brasil
Telefone (66)99682-4165 (Whatsapp)
https://www.editorapantanal.com.br
contato@editorapantanal.com.br

ISBN 978-658146002-0