

Caminhos da Matemática

História,
Educação e
Aplicações

Bruno Rodrigues de Oliveira
Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera
(Organizadores)



Pantanal Editora

2019

Bruno Rodrigues de Oliveira
Alan Mario Zuffo
Jorge González Aguilera
(Organizadores)

Caminhos da Matemática

História, Educação e Aplicações



Pantanal Editora

2019

Copyright© Pantanal Editora
Copyright do Texto© 2019 Os Autores
Copyright da Edição© 2019 Pantanal Editora
Editor Chefe: Prof. Dr. Alan Mario Zuffo
Editores Executivos: Prof. Dr. Jorge González Aguilera
Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

Diagramação: Os editores
Edição de Arte: Os editores e autores
Revisão: Os Autores

Conselho Editorial

- Prof^a. Dr^a. Albys Ferrer Dubois – UO
- Prof. Dr. Caio Cesar Enside de Abreu – UNEMAT
- Prof. Msc. David Chacon Alvarez – UNICENTRO
- Prof. Dr. Fábio Steiner - UEMS
- Prof. Msc. Javier Revilla Armesto – UCG
- Prof. Dr. Julio Cezar Uzinski – UFMT
- Prof. Msc. Lucas Rodrigues Oliveira – Município de Chapadão do Sul
- Prof. Dr. Rafael Felipe Ratke – UFMS
- Prof. Dr. Wéverson Lima Fonseca – UFC
- Prof^a. Dr^a. Yilan Fung Boix – UO

Conselho Técnico Científico

- Esp. Joacir Mário Zuffo Júnior - UNEMAT
- Esp. Maurício Amormino Júnior - UFMG

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)	
C183	Caminhos da matemática [recurso eletrônico] : história, educação e aplicações / Organizadores Bruno Rodrigues de Oliveira, Alan Mario Zuffo, Jorge González Aguilera. – Nova Xavantina, MT: Pantanal Editora, 2019. 138 p. : il. Formato: PDF Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader Modo de acesso: World Wide Web ISBN 978-65-81460-02-0 1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática – Formação. I. Oliveira, Bruno Rodrigues de. II. Zuffo, Alan Mario. III. Aguilera, Jorge González. CDD 510.07
Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422	

O conteúdo dos livros e capítulos, seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. O download da obra é permitido e o compartilhamento desde que sejam citadas as referências dos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Pantanal Editora
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000. Nova Xavantina – Mato Grosso - Brasil
Telefone (66)99682-4165 (Whatsapp)
<https://www.editorapantanal.com.br>
contato@editorapantanal.com.br

Apresentação

As principais vertentes no estudo das ciências da matemática são: história da matemática, aspectos relativos ao ensino e aprendizagem da disciplina, o estudo da matemática por si mesma, denominada de matemática pura e também as aplicações das teorias matemáticas.

Neste livro são apresentadas discussões sobre questões relativas a história da matemática, a educação e aplicações.

No primeiro tópico, os autores elaboram um texto que resgata a história do primeiro matemático brasileiro a obter o doutoramento, destacando suas principais contribuições.

No segundo tópico, é apresentada uma pesquisa sobre o ensino/aprendizagem da disciplina de matemática financeira no nível superior, empregando a metodologia de ensino e avaliação *Team Based Learning*.

Mesclando os tópicos de aplicação e educação, temos um trabalho sobre as funções e equações exponenciais e logarítmicas, tratando um pouco sobre seu desenvolvimento e importância históricos e sua utilização até os dias atuais.

Por último, relativo ao tópico de aplicação, duas pesquisas ilustram diferentes teorias matemáticas, concernentes a análise de dados e equações diferenciais, exibindo suas aplicações na análise de sinais de voz e estudo de circuitos elétricos, respectivamente.

Assim sendo, este livro trilha apenas uns pouquíssimos caminhos construídos pela matemática. Pretendemos que esta obra seja ampliada para que esta disciplina tão essencial para o desenvolvimento da ciência possa ser melhor compreendida em suas mais diferentes abordagens.

Bruno Rodrigues de Oliveira

Alan Mario Zuffo

Jorge González Aguilera

SUMÁRIO

Capítulo 1	5
Joaquim Gomes De Souza (1829-1864): A Construção de uma Imagem de Souzinha	
Capítulo 2	37
Aplicações de funções e equações exponenciais e logarítmicas	
Capítulo 3	51
Ensino de matemática financeira no curso de licenciatura em matemática e bacharelado em ciências contábeis: reflexões dos impactos no processo de ensino/aprendizagem e/ou no mercado de trabalho	
Capítulo 4	61
Extração de Características em Sinais de Voz por meio da Análise de Componentes Independentes	
Capítulo 5	76
Equações Diferenciais Ordinárias na Aplicação de Circuitos Elétricos	

Equações Diferenciais Ordinárias na Aplicação de Circuitos Elétricos

Fabício Ely Gossler^{1*}

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi publicado primeiramente como um Trabalho de Conclusão de Curso no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), Unidade de Cassilândia, sob orientação do professor Dr. Marco aparecido Queiroz Duarte. Dada sua característica estilo livro texto, achei por bem publica-lo como capítulo de livro também, para que os conhecimentos aqui apresentados sejam mais amplamente divulgados.

As equações diferenciais surgiram no século XVII com os avanços do Cálculo Diferencial e Integral, pelas obras de Newton (1642–1727) e Leibniz (1646–1716), onde puderam ser notados inúmeros modelos matemáticos. A principal motivação para os estudos das equações diferenciais, veio dos problemas de modelagem dos fenômenos da Mecânica Clássica, como por exemplo, o movimento dos planetas (Bassanezi e Ferreira, 1988).

Depois do problema da modelagem ser resolvida através de uma equação diferencial, surgia então o problema de resolução da mesma. Alguns desses problemas foram estudados e resolvidos por Leonhard Euler (1707–1783), alguns membros da família Bernouli (1654–1705) e muitos outros (Bassanezi e Ferreira, 1988).

Durante os estudos das soluções de equações diferenciais surge um matemático que iria fortalecer ainda mais essa teoria. Seu nome era Augustin Louis Cauchy (1789–1857), e ele demonstrou a existência de soluções para uma grande parte das equações diferenciais, que foram apresentadas em muitos modelos (Bassanezi e Ferreira, 1988).

A modelagem que trabalha com as variáveis essenciais se comporta aproximadamente como o problema real estudado. Um modelo bem elaborado que simula um determinado fenômeno físico poderá chegar muito próximo da solução real. Um circuito elétrico, por exemplo, é um modelo matemático que se comporta aproximadamente como um sistema elétrico real (Nilsson e Riedel, 2009).

¹ Rua Clevelândia 1924, Sibipiruna. Chapadão do Sul-MS.

*Autor de Correspondência: fabricioely08@gmail.com

Com a invenção da bateria, por Alessandro Volta (1745–1827), foi possível se obter um fluxo contínuo de corrente. Desse modo surgiram os primeiros circuitos elétricos nos quais se usava uma bateria e eletrodos imersos em um recipiente cheio de água. O fluxo da corrente pela água produzia hidrogênio e oxigênio (Soclof, 2014).

A primeira grande aplicação dos circuitos elétricos foi a de iluminação. Logo após a invenção da lâmpada incandescente por Thomas Edison (1847–193), procurava-se um sistema completo de geração e distribuição de energia (Soclof, 2014).

O principal objetivo desse trabalho é a modelagem de específicos circuitos elétricos, usando equações diferenciais ordinárias. Assim, abordaremos primeiro a teoria das equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem, com exemplos de resoluções usando os possíveis métodos. Finalmente, abordaremos e definiremos algumas questões de eletricidade para usarmos na modelagem de circuitos elétricos.

TERMINOLOGIA E DEFINIÇÕES BÁSICAS

As equações diferenciais são de extrema importância para o ramo da matemática, elas modelam os mais variados tipos de fenômenos encontrados na natureza. Abrangem certas quantidades que variam com o tempo, ou seja, as equações diferenciais estão diretamente ligadas a taxas de variação.

Enfatizando, “As equações diferenciais têm ampla aplicação na resolução de problemas complexos sobre movimento, crescimento, vibrações, eletricidade e magnetismo, aerodinâmica, termodinâmica, hidrodinâmica, energia nuclear e todo tipo de fenômeno físico que envolva taxas de variação de quantidades variáveis” (Swokowski, 1994, p. 637).

O curso de Cálculo Diferencial e Integral é um dos pré-requisitos básicos que se precisa ter para poder resolver equações diferenciais. Na resolução de uma equação diferencial é indispensável entender o conceito de derivada e dominar certas técnicas de integração (integração por substituição, partes e frações parciais). Pois do Cálculo Diferencial e Integral, temos que uma função $y = f(x)$, tem como sua derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

cujo o resultado, será uma função de x . Como por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \text{ ou } \frac{dy}{dx} = 2xy.$$

É importante perceber que o estudo das equações diferenciais não é voltado para derivar funções, isso é muito bem feito nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral. O estudo das equações diferenciais está voltado para a resolução de equações diferenciais, ou seja, dada certa

equação como a do exemplo anterior $\frac{dy}{dx} = 2xy$, precisamos encontrar de alguma maneira, uma (função) solução $y = f(x)$ que satisfaça tal equação.

Vejam os a seguir a Definição 1.1 sobre equação diferencial (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Definição 1.1 Equação Diferencial

Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial (ED).

Complementando, “Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais” (Boyce e DiPrima, 2001, p. 1).

Exemplo 1.1 – São EDs:

$$\frac{dy}{dt} + 21ty = t^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 13y = 20$$

$$3x\frac{\partial u}{\partial y} - 5y\frac{\partial u}{\partial x} = 3u$$

$$(y - x)dx + 4xdy = 0$$

$$y' + y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\frac{d^5y}{dx^5} + y^2 = 0.$$

CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Como é de se esperar, as EDs se distinguem uma das outras, assim como as equações algébricas de primeiro grau se diferenciam das de segundo grau. Precisamente, as EDs são classificadas de acordo com três características: quanto ao tipo, a ordem e a linearidade.

CLASSIFICAÇÃO PELO TIPO

Com relação ao tipo, existem duas classificações para as EDs, uma é a equação diferencial ordinária (EDO) e a outra é a equação diferencial parcial (EDP).

É importante sabermos a quantidade de variáveis de certa ED. “Uma das classificações mais óbvias é baseada em descobrir se a função desconhecida depende de uma única variável independente ou de diversas variáveis independentes.” (Boyce e DiPrima, 2001, p. 10)

Se uma equação diferencial contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária (EDO) (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Exemplo 1.2 – São EDOs:

$$\frac{dy}{dt} - 7y = 2$$

$$(5y - 3x)dx + 5xdy = 0$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = 9x$$

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

“Uma equação que envolve as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP)” (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Exemplo 1.3 – São EDPs:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}$$

$$3x \frac{\partial u}{\partial t} + 2y \frac{\partial u}{\partial x} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 8u \frac{\partial u}{\partial t}.$$

CLASSIFICAÇÃO PELA ORDEM

Quando temos um polinômio e queremos determinar o seu grau, basta olharmos o maior expoente a que a variável desse polinômio está elevado, ou seja, o grau é o maior número ao qual a variável está elevada. No caso das EDs, para determinarmos sua ordem, o processo é parecido. “A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a sua ordem” (Zill e Gullen, 2001, p. 2).

Exemplo 1.4

A equação

Derivada de segunda ordem

Derivada de primeira ordem

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 6x \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3y = 2e^x,$$

é uma EDO de segunda ordem (ou de ordem dois).

Como a equação diferencial $(y - x)dx + xdy = 0$ pode ser escrita na forma $x \frac{dy}{dx} + y = x$, dividindo-se pela diferencial dx , trata-se então de uma EDO de primeira ordem. A equação $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ é uma EDP de quarta ordem.

Nesse texto limitamos o nosso estudo apenas em aplicações das EDOs. Por isso, omitiremos as EDPs. Não omitimos aqui as EDPs porque não existem aplicações para elas, muito pelo contrário, elas são extremamente importantes em diversas aplicações.

Uma EDO geral de n -ésima ordem é frequentemente representada simbolicamente por

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0. \quad (1.1)$$

CLASSIFICAÇÃO COMO LINEAR E NÃO-LINEAR

Uma EDO é chamada de linear quando pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (1.2)$$

Observe que as EDOs lineares são caracterizadas por duas propriedades: I) O grau da variável dependente y e de todas as suas derivadas é igual a 1, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1. II) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Uma equação que não é linear é chamada de não-linear (Zill e Gullen, 2001, p. 4).

As equações $xdy + ydx = 0$, $y'' - 2y' + y = 0$, $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$, são EDOs lineares de primeira, segunda e terceira ordem, respectivamente.

Por outro lado,

$$yy'' - 2y' = x \quad \text{e} \quad \frac{d^3 y}{dx^3} + y^2 = 0,$$

são EDOs não-lineares de segunda e terceira ordem, respectivamente.

A teoria matemática e os métodos para resolver equações lineares estão bastante desenvolvidos. Em contraste, a teoria para equações não-lineares é mais complicada e os métodos de resolução são menos satisfatórios. Em vista disso, é auspicioso que muitos problemas significativos levam a equações diferenciais ordinárias lineares ou podem ser aproximados por equações lineares [...] Esse processo de aproximar uma equação não-linear por uma linear é chamado de linearização e é extremamente útil para tratar equações não-lineares (Boyce e Diprima, 2001, p. 11).

SOLUÇÕES

Vejam os a seguir a Definição 1.2 sobre soluções para uma EDO (Zill e Gullen, 2001, p.4):

Definição 1.2 Solução para uma EDO
Qualquer função f definida em algum intervalo I , que, quando substituída na EDO reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo dado.

Podemos reescrever essa definição da seguinte maneira: Uma solução para uma EDO,

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.3)$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação (1.3), isto é,

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0, \quad (1.4)$$

para todo x em algum intervalo I definido.

[...] Muitas vezes não é tão fácil encontrar soluções de equações diferenciais. No entanto, se você encontrar uma função que pode ser solução de uma equação diferencial dada, é muito fácil, em geral, verificar se a função é de fato solução: basta substituí-la na equação. [...] É claro que isso não é um modo satisfatório de resolver a maioria das equações diferenciais, já que existe um número grande demais de funções possíveis para que se tenha alguma chance de encontrar a função correta aleatoriamente. De qualquer modo, é importante compreender que é possível verificar se qualquer solução proposta está correta substituindo-a na equação diferencial. Para um problema de alguma importância, essa pode ser uma verificação útil e deve ser transformada em hábito (Boyce e Diprima, 2001, p. 11).

Exemplo 1.5: A função $y = e^x$ é uma solução para a EDO $y = y'$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. De fato, se escrevermos a EDO dada como $y - y' = 0$, esubstituímos $y = e^x$ e $y' = e^x$ implicaremos na identidade, pois $e^x - e^x = 0$, para todo x no intervalo dado.

SOLUÇÕES EXPLÍCITAS E IMPLÍCITAS

As soluções das EDOs podem ser apresentadas de duas formas, explícitas ou implícitas.

“Uma solução para uma EDO $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ que pode ser escrita na forma $y = f(x)$, é chamada de solução explícita.” (Zill e Gullen, 2001, p. 6).

Exemplo 1.6: A EDO $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ tem como solução explícita $y = x^2 + x$.

“Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma solução implícita de uma EDO em um intervalo I , se ela define uma ou mais soluções explícitas em I ” (ZILL, 2001, p. 6).

Exemplo 1.7: A EDO $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ tem como solução implícita $x^2 + y^2 - 49 = 0$, no intervalo de $-7 < x < 7$. De fato, pois pela derivação implícita temos $\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} - \frac{d(49)}{dx} = 0$ e $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

NÚMERO DE SOLUÇÕES

No que se diz respeito ao número exato de soluções de uma EDO, podemos dizer que ela possui um número infinito (uma família de soluções), único ou nenhuma solução.

Exemplo 1.8: A função $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é uma solução de $y'' + 4y = 0$. De fato, diferenciando y , obtemos $y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 \sin 2x$ e $y'' = -4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x$. Logo,

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= (-4c_1 \sin 2x - 4c_2 \cos 2x) + 4(c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x) \\ &= (-4c_1 + 4c_1) \sin 2x + (-4c_2 + 4c_2) \cos 2x \\ &= (0) \sin 2x + (0) \cos 2x \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim a função $y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$ satisfaz a EDO, para quaisquer valores das constantes c_1 e c_2 . Portanto a EDO $y'' + 4y = 0$ possui infinitas soluções.

Exemplo 1.9: A seguinte EDO $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y^2 = 0$ possui uma única solução, que é $y = 0$.

Exemplo 1.10: A EDO $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + 7y^2 = -23$ não possui solução. Observamos que nesta EDO, o primeiro membro é uma soma de potências pares, enquanto o segundo membro é negativo. Como nenhuma solução (função) $y(x)$ satisfaz tal equação, a EDO dada não tem solução.

SOLUÇÃO PARTICULAR E SOLUÇÃO GERAL

Uma solução particular de uma EDO é qualquer solução da mesma. A solução geral da EDO é o conjunto de todas as suas soluções.

Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de **solução particular**. Uma maneira de obter uma solução particular é escolher valores específicos para o(s) parâmetro(s) na família de soluções. [...] Se *toda* solução para $F(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$ no intervalo I pode ser obtida de $G(x, y, c_1 \dots c_n) = 0$ por uma escolha apropriada dos c_i , $i = 1, 2, \dots, n$, dizemos que a família a n -parâmetros é uma solução **geral**, ou **completa**, para a equação diferencial (Zill e Gullen, 2001, p. 9-10).

Exemplo 1.11: A função $y = ce^x$ é uma solução geral da EDO $y' = y$, pois $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para a mesma. Para $c = 0, -2$ e 5 , obtemos as soluções particulares $y = 0, y = -2e^x$ e $5e^x$, respectivamente.

PROBLEMAS DE VALOR INICIAL E VALORES DE CONTORNO

Um problema de valor inicial caracteriza-se pelas condições subsidiárias (informações extras) se referindo a um único ponto da variável independente. Estas condições são chamadas de condições iniciais. Em problemas de valores de contorno, as condições subsidiárias se referem a mais de um ponto da variável independente. Neste caso, as condições subsidiárias são chamadas de condições de contorno.

Exemplo 1.12: O problema $y'' + 2y' = e^x; y(\pi) = 1, y''(\pi) = 2$ é um problema de valor inicial, pois as duas condições subsidiárias $y(\pi) = 1$ e $y''(\pi) = 2$ são dadas no mesmo ponto.

Exemplo 1.13: O problema $y'' + 2y' = e^x; y(3) = 2, y''(5) = 4$ é um problema de valor de contorno, pois as duas condições subsidiárias $y(3) = 2$ e $y''(5) = 4$ são dadas em diferentes pontos.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE PRIMEIRA ORDEM

As EDOs de primeira ordem são da forma

$$F(x, y, y') = 0. \quad (2.1)$$

Podemos escrever a equação (2.1) de outra forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (2.2)$$

ou ainda, podemos escrever a equação(2.2) na forma diferencial

$$f(x, y)dx - dy = 0, \quad (2.3)$$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

Suponhamos que tivéssemos que resolver uma EDO de primeira ordem na forma (2.2) sujeita a uma condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervalo I e y_0 é um número real arbitrário. Então temos o seguinte problema:

$$\text{Resolva: } \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$\text{Sujeito a: } y(x_0) = y_0$$

Esse problema é chamado de **problema de valor inicial**. “Em termos geométricos, estamos procurando uma solução para a equação diferencial, definida em algum intervalo I tal

que o gráfico da solução passe por um ponto (x_0, y_0) determinado *a priori*” (Zill e Gullen, 2001, p.39).

Exemplo 2.1: Vimos no Exemplo 1.11 do Capítulo 1, que $y = ce^x$ é uma família a um parâmetro de soluções para $y' = y$ no intervalo $(-\infty, \infty)$. Se especificarmos, digamos $y(0) = 3$, então substituindo $x = 0$ e $y = 3$ na família, obteremos $3 = ce^0 = c$. Logo a função $y = 3e^x$ é uma solução para o PVI $y' = y, y(0) = 3$. Se tivéssemos pedido uma solução de $y' = y$ que passe pelo ponto $(1,3)$ em vez de $(0,3)$, então $y(1) = 3$ iria nos dar $c = 3e^{-1}$, e daí, $y = 3e^{x-1}$.

Existem duas questões fundamentais, que surgem quando estamos considerando um PVI (Zill e Gullen, 2001, p.40): Existe uma solução para o problema? Ou seja, A EDO $dy/dx = f(x, y)$ possui uma solução cujo gráfico passa pelo ponto (x_0, y_0) ? Se essa solução existe, ela é única? No exemplo 2.2 mostraremos que a resposta à segunda questão é: algumas vezes não.

Exemplo 2.2: Podemos verificar que cada uma das funções $y = 0$ e $y = \frac{x^4}{16}$ satisfaz a equação diferencial e a condição inicial no problema $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, y(0) = 0$.

Quando estamos interessados em resolver uma EDO de primeira ordem, é comum analisarmos antes se existe uma solução para ela, e se, caso exista, ela será única. Charles Émile Picard (1856–1941) enunciou um teorema que nos ajuda a responder essas questões. Vejamos a seguir o Teorema 2.1 (Zill e Gullen, 2001, p. 40) que nos garante a existência e a unicidade de soluções, e logo em seguida a sua demonstração.

Teorema 2.1 Existência de uma Única Solução

Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em R , então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial (PVI).

Demonstração (SANTOS, 2010):

Primeiro provaremos a existência da solução e depois sua unicidade.

1. Existência:

Definindo a sequência de funções $y_n(t)$ por $y_0(x) = y_0, y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds$, para $n = 1, 2, 3 \dots$ Como $f(x, y)$ é contínua no retângulo R , existe uma constante positiva β tal que $|f(x, y)| \leq \beta$, para $(x, y) \in R$. Assim, $|y_1(x) - y_0| \leq \beta|x - x_0|$,

para $a \leq x \leq b$. Como $\partial f / \partial y$ é contínua no retângulo R , existe uma constante positiva α tal que $|f(x, y) - f(x, z)| \leq \alpha|y - z|$ para $a \leq x \leq b, c \leq y, z \leq d$.

Assim, $|y_2(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \leq \alpha \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_0(s)| ds \leq \alpha \beta \int_{x_0}^x |s - x_0| ds = \alpha \beta \frac{|x - x_0|^2}{2}$, isto é, $|y_2(x) - y_1(x)| \leq \alpha \beta \frac{|x - x_0|^2}{2}$. Do mesmo modo, $|y_3(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \leq \alpha \int_{x_0}^x |y_2(s) - y_1(s)| ds \leq \alpha^2 \beta \int_{x_0}^x \frac{|s - x_0|^2}{2} ds = \alpha^2 \beta \frac{|x - x_0|^3}{6}$, ou seja, $|y_3(x) - y_2(x)| \leq \alpha^2 \beta \frac{|x - x_0|^3}{6}$.

Suponhamos por indução que $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \alpha^{n-2} \beta \frac{|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!}$, então

$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \leq \alpha \int_{x_0}^x |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \leq \alpha \int_{x_0}^x \alpha^{n-2} \beta \frac{|s - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = \alpha^{n-1} \beta \frac{|x - x_0|^n}{n!}$, isto é,

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \alpha^{n-1} \beta \frac{|x - x_0|^n}{n!} \quad (2.4)$$

Estas desigualdades são válidas para $a \leq a' \leq x \leq b' \leq b$ em que a' e b' são tais que $c \leq y_n(x) \leq d$ sempre que $a' \leq x \leq b'$.

Segue de (2.4) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \beta \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n-1} \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(x) - y_{k-1}(x))$$

então, $y_n(x)$ é convergente. Seja

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x).$$

Como

$$|y_m(x) - y_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^m |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^m \alpha^{k-1} \frac{(b - a)^k}{k!}$$

assim, passando ao limite quando m tende a infinito obtemos que

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(b - a)^k}{k!}. \quad (2.5)$$

Logo, dado um $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(x) - y_n(x)| < \epsilon/3$, para $a' \leq x \leq b'$. Daí segue-se que $y(x)$ é contínua, pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente

próximo de x , temos que $|y(x) - y_n(s)| < \epsilon/3$ e para n suficientemente grande e $|y(x) - y_n(x)| < \epsilon/3$ e $|y(s) - y_n(s)| < \epsilon/3$ o que implica que

$$|y(x) - y_n(s)| \leq |y(x) - y_n(x)| \leq |y(s) - y_n(s)| < \epsilon.$$

Além disso, para $a' \leq x \leq b'$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(s)) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

pois por (2.5) temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds - \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq \alpha \int_{x_0}^x |y_n(s) - y(s)| ds \\ &\leq \alpha \beta (x - x_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(b-a)^k}{k!} \end{aligned}$$

que tende para zero quando n tende para infinito. Portanto

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \\ &= y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(s, y_{n-1}(s)) ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)) ds \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|y(x) - y_n(x)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha^{k-1} \frac{(b-a)^k}{k!}. \quad (2.5)$$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds. \quad (2.6)$$

Derivando a equação (2.6) em relação a x , podemos notar que $y(x)$ é a solução do problema de valor inicial.

Unicidade

Supondo que $y(x)$ e $z(x)$ sejam soluções do PVI. Seja $u(x) = \int_{x_0}^x |y(s) - z(s)| ds$. Assim, como $y(x) = \int_{x_0}^x y'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$, $z(x) = \int_{x_0}^x z'(s) ds = \int_{x_0}^x f(s, z(s)) ds$, então

$$\begin{aligned} u'(x) &= |y(x) - z(x)| \\ &\leq \int_{x_0}^x |y'(s) - z'(s)| ds \\ &= \int_{x_0}^x |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \\ &\leq \alpha \int_{x_0}^x |y(s) - z(s)| ds \\ &= \alpha u(x) \end{aligned}$$

ou seja, $u'(x) \leq \alpha u(x)$. Subtraindo $\alpha u(x)$ e multiplicando por $e^{-\alpha x}$, obtemos $\frac{d}{dx}(e^{-\alpha x} u(x)) \leq 0$, com $u(x_0) = 0$. Isto implica que $e^{-\alpha x} u(x) = 0$, lembrando que $u(x) \geq 0$ e portanto que $u(x) = 0$, para todo x . Assim $y(x) = z(x)$, para todo x .

O resultado anterior é um dos mais populares teoremas de existência e unicidade para equações diferenciais de primeira ordem, porque os critérios de continuidade de $f(x, y)$ e $\partial f / \partial y$ são relativamente fáceis de ser verificados. Em geral, não é possível determinar um intervalo específico I no qual uma solução está definida sem realmente resolver uma equação diferencial. (Zill e Gullen, 2001, p. 41).

[.] Se você encontrar um problema de valor inicial durante a investigação de um problema físico, você pode querer saber se ele tem solução antes de gastar um bocadinho de tempo e esforço para resolvê-lo. Além disso, se conseguir encontrar uma solução, você pode estar interessado em saber se deve continuar a procurar outras soluções possíveis ou se pode ter certeza de que não existem outras soluções. (Boyce e Diprima, 2001, p. 35).

Exemplo 2.3: Vimos que no Exemplo 2.2 que a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$ possui pelo menos duas soluções cujos gráficos passam por $(0,0)$. As funções $f(x, y) = xy^{1/2}$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$ são contínuas no semi-plano superior definido por $y > 0$. Concluímos do Teorema 2.1 que, dado um ponto qualquer (x_0, y_0) com $y_0 > 0$ (por exemplo $(0,1)$), existe algum intervalo em torno de x_0 no qual a equação diferencial dada possui uma única solução $y(x)$, tal que $y(x_0) = y_0$.

CLASSIFICAÇÃO DAS EDOS DE PRIMEIRA ORDEM

Uma EDO assume a seguinte forma se a função f for independente da variável dependente y :

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \quad (2.7)$$

Assim, a equação (2.7) terá uma solução por integração direta, ou seja, basta integrar ambos os lados da equação

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx. \quad (2.8)$$

Como $\int \frac{dy}{dx} dx = y$ (pois a integral e a derivada são operações inversas, isto é, integrar a derivada de uma função resulta na própria função) e $F(x)$ é a anti-derivada de $f(x)$, teremos a seguinte solução de (2.7):

$$y = F(x) + c. \quad (2.9)$$

A constante c surgiu por causa da integração. Observamos que a equação (2.9) é uma **solução geral** da EDO dada. Podemos escolher qualquer valor de c para ser uma solução da equação. Suponhamos que tivéssemos as seguintes condições iniciais para o PVI:

$$y(x_0) = y_0. \quad (2.10)$$

Só precisamos substituir as condições iniciais de (2.10) em (2.9) para obtermos: $y_0 = F(x_0) + c \Rightarrow c = y_0 - F(x_0)$. Assim achando um valor fixo para c , obtemos uma **solução particular** para o PVI $\frac{dy}{dx} = f(x)$, $y(x_0) = y_0$. Note que geralmente para acharmos uma solução particular, precisamos primeiro achar a solução geral do problema.

É de se esperar que dependendo da EDO não se aplique esse método da integração direta. Para algumas EDOs, existem métodos específicos de resoluções de acordo com suas próprias características. A seguir são apresentadas as definições de quatro classes de EDOs de primeira ordem:

- Equações com Variáveis Separáveis;
- Equações Homogêneas;
- Equações Exatas;
- Equações Lineares.

Essas classes são especiais devido ao fato de existirem métodos de resoluções exclusivas para a EDO. Esses métodos foram desenvolvidos e se aplicam para uma determinada EDO que possui certa característica, ou seja, o método de resolução que deverá ser usado dependerá da característica específica da mesma. Lembrando que nem toda EDO de primeira ordem se encaixa em uma dessas classes, e também nem mesmo pode ser transformada em uma delas.

EQUAÇÕES COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Considere uma EDO do tipo $\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$ onde f e g são funções contínuas em algum intervalo de R . Dizemos que essa EDO é “separável” ou tem “variáveis separáveis”. Separando então as variáveis

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)dx. \quad (2.11)$$

e integrando a equação (2.11) em ambos os membros $\int \frac{dy}{f(y)} = \int g(x)dx + c$, obtemos

$$F(y) = G(x). \quad (2.12)$$

Se pudermos inverter a função F , a solução formal em (2.12) será $y = F^{-1}(G(x))$. Vejamos agora a Definição 2.1 de Equação Separável (Zill e Gullen, 2001, p.44).

Definição 2.1 Equação Separável

Uma EDO da forma $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$ é chamada **separável** ou de **variáveis separáveis**

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Como o próprio nome já diz, o ponto chave para resolver esse tipo de EDO é separar as variáveis, colocando a variável dependente de um lado da equação enquanto que a variável independente fica do outro. A equação (2.11) indica o procedimento desse fato. Depois de separar as variáveis, basta aplicar a integração. Vejamos o Exemplo 2.4 seguinte:

Exemplo 2.4: Resolva $(1+x)dy - ydx = 0$. Resolução: Podemos reescrever $(1+x)dy - ydx = 0$ como sendo $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x}$. Integrando ambos os lados da equação e resolvendo-a, obteremos

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{1+x} \\ \ln|y| &= \ln|1+x| + C_1 \\ y &= e^{\ln|1+x| + C_1} \\ &= e^{\ln|1+x|} \cdot e^{C_1} \\ &= |1+x| \cdot e^{C_1} \\ &= \pm e^{C_1}(1+x). \end{aligned}$$

Trocando $\pm e^{C_1}$ por c , concluímos que a solução para a EDO é $y = c(1+x)$.

Observe que não existe a necessidade de usar duas constantes de integração na resolução de uma EDO, pois, múltiplos, somas, diferenças ou combinações de constantes podem ser trocados por uma única constante. Por isso, nos próximos exemplos adotaremos esse fato.

Exemplo 2.5: Resolva $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{1+x}$. Resolução: Podemos reescrever $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{1+x}$ como sendo $y^2dy = \frac{1+x}{x^2}dx$, ou ainda $y^2dy = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}dx$. Integrando essa última em ambos os lados e resolvendo a integração, obteremos

$$\int y^2 dy = \int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} dx,$$

$$\frac{y^3}{3} = -x^{-1} + \ln|x| + k.$$

Multiplicando essa última equação por $3x$, teremos $xy^3 = -3 + 3x \ln|x| + 3kx$. Trocando $3k$ por c , concluímos que a solução implícita do problema será $xy^3 = -3 + 3x \ln|x| + cx$.

EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

A chave para resolver uma EDO homogênea é transformá-la em uma EDO separável, aplicando uma determinada substituição. Vejamos agora a definição 2.2 (Zill e Gullen, 2001, p. 52) de Equação Homogênea.

Definição 2.2 Equação Homogênea

Uma EDO da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é chamada de **homogênea** se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Para entendermos o método de resolução das EDOs Homogêneas, primeiro é preciso entender o que é uma função homogênea. Dizemos que uma função é homogênea de grau n se ela satisfaz a seguinte condição: $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para algum número real n . Se $f(x, y)$ for uma função homogênea de grau n , podemos escrever então

$$f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \text{ e } f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right), \quad (2.13)$$

sendo $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ e $f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ ambas homogêneas de grau zero. Suponhamos que temos a seguinte EDO

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (2.14)$$

e, verificando que M e N são funções homogêneas de mesmo grau, podemos então resolver essa mesma por meio de uma substituição algébrica. Dependendo da EDO podemos chamar $y = ux$ ou $x = vy$, sendo que u e v são as novas variáveis independentes. Esta substituição nos

possibilitará transformar a EDO homogênea em uma EDO de variáveis separáveis. Vejamos: Chamamos $y = ux$, logo sua diferencial $dy = udx + xdu$. Substituindo agora em (2.14), temos

$$M(x, ux)dx + N(x, ux)[u dx + x du] = 0. \quad (2.15)$$

Pela propriedade da homogeneidade dada em (2.13), podemos escrever (2.15) como

$$x^n M(1, u)dx + x^n N(1, u)[u dx + x du] = 0$$

ou

$$[M(1, u) + uN(1, u)]dx + xN(1, u)du = 0. \quad (2.16)$$

Assim, separando as variáveis em (2.16), teremos $\frac{dx}{x} + \frac{N(1, u) du}{M(1, u) + uN(1, u)} = 0$. Portanto, transformamos a EDO inicial homogênea em separável. De maneira análoga podemos obter a separação fazendo $x = vy$.

Exemplo 2.6: Resolva $(y^2 + yx)dx - x^2 dy = 0$ usando uma substituição apropriada. Resolução: Temos que $M(x, y) = y^2 + yx$ e $N(x, y) = -x^2$. Notemos que M e N são funções homogêneas de grau 2. Logo a EDO dada é homogênea. Fazendo $y = ux$, então $dy = udx + xdu$. Assim,

$$\begin{aligned} (y^2 + yx)dx - x^2 dy &= 0 \\ [(ux)^2 + (ux)x]dx - x^2(udx + xdu) &= 0 \\ u^2 x^2 dx + ux^2 dx - x^2 u dx - x^3 du &= 0 \\ x^2(u^2 + u - u)dx - x^3 du &= 0 \\ x^2 u^2 dx - x^3 du &= 0 \\ x^2 u^2 dx &= x^3 du \\ \frac{x^2}{x^3} dx &= \frac{1}{u^2} du, \end{aligned}$$

resultando em

$$\frac{1}{x} dx = \frac{1}{u^2} du. \quad (2.17)$$

Aplicando a integração em (2.17), obtemos $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{u^2} du + c$, e resolvendo essa última equação, teremos $\ln|x| = -u^{-1} + c$

$$\ln|x| + u^{-1} = c. \quad (2.18)$$

Como

$$y = ux \Rightarrow u = \frac{y}{x}. \quad (2.19)$$

Substituído (2.19) em (2.18) teremos, $\ln|x| + \left(\frac{y}{x}\right)^{-1} = c$, logo,

$$\ln|x| + \frac{x}{y} = c. \quad (2.20)$$

Multiplicando a equação (2.20) por y teremos a seguinte solução implícita da EDO:
 $y \ln|x| + x = yc.$

EQUAÇÕES EXATAS

Uma EDO na forma (2.14) é uma equação exata se

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \quad (2.21)$$

Vejamos agora a definição 2.3 (Zill e Gullen, 2001, p. 61) de Equação Exata.

Definição 2.3 Equação Exata

Uma EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é uma **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x,y)$. Uma EDO da forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é chamada de **equação exata** se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.

MÉTODO DE RESOLUÇÃO

Dada uma EDO na forma (2.14), ou seja, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$. Primeiro temos que verificar se ela é exata, isto é, temos que mostrar que (2.21) se verifica. Se (2.21) é satisfeita então podemos supor que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y). \quad (2.22)$$

Assim, integrando (2.22) em relação a x , obtemos

$$f(x,y) = \int M(x,y) dx + g(y). \quad (2.23)$$

Lembrando que y é considerada como uma constante, portanto $g(y)$ é a constante de integração. Agora, derivando (2.23) com relação a y e supondo também que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$

teremos $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) dx + g'(y) = N(x,y)$. Logo

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x,y) dx. \quad (2.24)$$

Por fim, basta integrarmos (2.24) em relação a y e substituir esse resultado em (2.23). A solução para a equação é $f(x,y) = c$. Podemos observar que poderíamos ter escolhido como suposição $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ e assim teríamos $f(x,y) = \int N(x,y) dy + h'(x)$ e $h'(x) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} \int N(x,y) dy$.

Exemplo 2.7: Resolva $(2y^2x - 3)dx + (2yx^2 + 4)dy = 0$. Resolução: Temos que $M(x, y) = 2y^2x - 3$ e $N(x, y) = 2yx^2 + 4$, e podemos verificar que $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 4yx = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$. Logo, a EDO é exata. Assim, suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$, ou seja, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y^2x - 3$ e integrando essa última equação em relação a x , temos $f(x, y) = \int 2y^2x - 3 dx + g(y)$, ou seja,

$$f(x, y) = y^2x^2 - 3x + g(y). \quad (2.25)$$

Agora, derivando (2.25) com relação a y e supondo também que $\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx^2 + 4$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 2yx^2 + 4 \\ \frac{\partial}{\partial y}(y^2x^2 - 3x + g(y)) &= 2yx^2 + 4 \\ 2yx^2 + g'(y) &= 2yx^2 + 4, \end{aligned}$$

portanto,

$$g'(y) = 4. \quad (2.26)$$

Integrando (2.26) em relação a y $\int g'(y) dy = \int 4 dy$ obtemos

$$g(y) = 4y. \quad (2.27)$$

Lembrando que nesse caso a constante de integração não precisa ser incluída, pois a solução é $f(x, y) = c$. Substituindo (2.27) em (2.25) obtemos a seguinte solução para a EDO $y^2x^2 - 3x + 4y = c$. É importante destacarmos que a solução para a equação não é $f(x, y) = y^2x^2 - 3x + 4y$, mas sim, $f(x, y) = c$.

FATOR INTEGRANTE

Nem sempre uma EDO da forma (2.14) será exata, ou seja, teremos situações em que a condição (2.21) não se verifica. Entretanto, é possível transformar (2.14) em uma EDO exata, mediante a multiplicação de um fator adequado.

Definição 2.4 Fator Integrante

Uma função $\mu(x, y)$ é um fator integrante de $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se a equação $\mu(x, y)[M(x, y)dx + N(x, y)dy] = 0$ é exata.

Exemplo 2.8: Resolva $6xy dx + (4y + 9x^2)dy = 0$, usando $\mu(x, y) = y^2$, como fator integrante. Resolução: Podemos verificar que a equação diferencial dada,

$$6xy \, dx + (4y + 9x^2)dy = 0. \quad (2.28)$$

não é separável, homogênea e nem exata. Multiplicando (2.28) por $\mu(x, y)$ obtemos

$$6xy^3 \, dx + (4y^3 + 9y^2x^2) \, dy = 0. \quad (2.29)$$

que é exata, pois fazendo $M(x, y) = 6xy^3$ e $N(x, y) = 4y^3 + 9y^2x^2$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 18xy^2 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Com isso podemos resolver a equação (2.29), cuja solução será a mesma de (2.28). Fazendo

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy^3$ e integrando essa última equação em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int 6xy^3 \, dx + g(y) \\ &= 6y^3 \int x \, dx + g(y) \\ &= 6y^3 \left(\frac{x^2}{2} \right) + g(y) \\ &= 3y^3x^2 + g(y), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(x, y) = 3y^3x^2 + g(y). \quad (2.30)$$

Derivando (2.30) com relação a y obtemos $\frac{\partial f}{\partial y} = 9y^2x^2 + g'(y)$. Supondo que $\frac{\partial f}{\partial y} =$

$N(x, y)$, dessa última teremos que, $9y^2x^2 + g'(y) = 4y^3 + 9y^2x^2$

isto é,

$$g'(y) = 4y^3. \quad (2.31)$$

Integrando (2.31) em relação a y

$$g(y) = \int 4y^3 \, dy = y^4 \quad (2.32)$$

e substituindo (2.32) em (2.30) resulta em $f(x, y) = 3y^3x^2 + y^4$, ou seja, $3y^3x^2 + y^4 = c$.

EQUAÇÕES LINEARES

Já definimos no Capítulo 1, a forma geral (1.2) das EDOs lineares de ordem n . No caso em que $n = 1$, teremos

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad (2.33)$$

ou seja, uma EDO linear de primeira ordem. Vejamos agora a Definição 2.5 de Equação Linear (Zill e Gullen, 2001, p. 69).

Definição 2.5 Equação Linear

Uma EDO da forma $a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$ é chamada de **linear**.

Dividindo (2.33) pelo coeficiente $a_1(x)$, teremos $\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. Chamando $P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)}$, obtemos uma forma mais conveniente para a EDO linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad (2.34)$$

Usando diferenciais podemos escrever a equação (2.34) como sendo $dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0$. As EDOs lineares possuem uma interessante propriedade pela qual sempre podemos encontrar um fator integrante $\mu(x)$ em que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0. \quad (2.35)$$

O lado esquerdo da equação (2.35) é uma diferencial exata se $\frac{\partial}{\partial x}\mu(x)dy = \frac{\partial}{\partial y}\mu(x)[P(x)y - f(x)]$ ou $\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x)$. Podemos facilmente resolver essa última equação (EDO separável), determinando o fator integrante $\mu(x)$. Temos então $\frac{d\mu}{\mu} = P(x)dx$. Integrando essa última equação em ambos os lados, teremos

$$\ln|\mu| = \int P(x)dx. \quad (2.36)$$

Aplicando a exponencial nos dois lados da equação (2.36) obtemos,

$$e^{\ln|\mu|} = e^{\int P(x)dx}$$

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Portanto a função $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ é um fator integrante para uma EDO linear.

Para resolvermos uma EDO linear de primeira ordem do tipo $a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$, primeiro precisamos escrevê-la na forma (2.34). Para isso basta dividirmos toda a equação por $a_1(x)$, ou seja, fazemos com que o coeficiente de $\frac{dy}{dx}$ seja igual a um: $\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}$. Depois de identificarmos $P(x)$, podemos encontrar o fator integrante, e em seguida, multiplicamos a equação (2.34) pelo mesmo, obtendo:

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)dx}y = e^{\int P(x)dx}f(x). \quad (2.37)$$

O lado esquerdo da equação (2.37) é a derivada do produto do fator integrante $e^{\int P(x)dx}$ pela variável dependente y . Assim, podemos reescrever (2.37) como sendo

$$\frac{d}{dx} [e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x). \quad (2.38)$$

Para finalizar, basta integrarmos em ambos os lados da equação (2.38) $\int \frac{d}{dx} [e^{\int P(x)dx} y] dx = \int e^{\int P(x)dx} f(x) dx$ para chegarmos na solução geral de (2.33): $y = \frac{\int e^{\int P(x)dx} f(x) dx}{e^{\int P(x)dx}}$.

Exemplo 2.9: Resolva a EDO $3 \frac{dy}{dx} + 12y = 4$, encontrando a solução geral, especificando um intervalo para o qual ela está definida. Resolução: Observamos primeiramente que a equação dada é uma EDO linear de primeira ordem. Colocando-a na forma (2.34), obteremos

$$\frac{dy}{dx} + 4y = \frac{4}{3}. \quad (2.39)$$

Como $P(x) = 4$, logo teremos o seguinte fator integrante $\mu(x)$: $\mu(x) = e^{4x}$. Multiplicando (2.39) pelo fator integrante encontrado, obtemos $e^{4x} \left[\frac{dy}{dx} + 4y \right] = e^{4x} \frac{4}{3}$, logo,

$$e^{4x} \frac{dy}{dx} + e^{4x} 4y = e^{4x} \frac{4}{3}. \quad (2.40)$$

Lembrando que o lado esquerdo da equação (2.40) é a derivada do produto entre o fator integrante e^{4x} pela variável dependente y . Assim

$$\frac{d}{dx} (e^{4x} y) = e^{4x} \frac{4}{3}. \quad (2.41)$$

Integrando ambos os lados de (2.41) em relação a x e resolvendo a equação resultante, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx} (e^{4x} y) dx &= \int e^{4x} \frac{4}{3} dx \\ e^{4x} y &= \frac{4}{3} \int e^{4x} dx \\ e^{4x} y &= \frac{4}{3} \left[\frac{1}{4} e^{4x} + c \right], \end{aligned}$$

portanto,

$$e^{4x} y = \frac{1}{3} e^{4x} + \frac{4}{3} c. \quad (2.42)$$

Multiplicando a equação (2.42) por e^{-4x} , teremos a seguinte solução e o respectivo intervalo para a qual ela está definida: $y = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} c e^{-4x}$, $-\infty < x < +\infty$.

Exemplo 2.10: Resolva a EDO $\frac{dy}{dx} + 5y = 20$, sujeita a condição inicial $y(0) = 2$. Resolução: A equação já foi dada na forma (2.34). Assim, o fator integrante é e^{5x} . Multiplicando a EDO dada pelo fator integrante obtemos

$$\begin{aligned} e^{5x} \left[\frac{dy}{dx} + 5y \right] &= e^{5x} 20 \\ e^{5x} \frac{dy}{dx} + e^{5x} 5y &= e^{5x} 20, \end{aligned}$$

e que de maneira análoga ao exercício anterior, nos dirige para $e^{5x}y = 20 \int e^{5x} dx$.

Resolvendo então essa última expressão chegamos ao seguinte resultado

$$y = 4 + ce^{-5x}. \quad (2.43)$$

De acordo com a condição inicial temos que $y(0) = 2$, ou seja, $x = 0 \Rightarrow y = 2$.

Substituindo estes valores em (2.43), teremos $2 = 4 + ce^{-5(0)}$, de onde chegamos que $c = -2$.

Portanto, a solução particular desse problema é $y = 4 - 2e^{-5x}$, $-\infty < x < +\infty$.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE SEGUNDA ORDEM

As EDOs de segunda ordem são da forma

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (3.1)$$

Podemos escrever (3.1) de outra forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y'). \quad (3.2)$$

No Capítulo anterior, vimos que podemos resolver EDOs não-lineares de primeira ordem, usando determinadas técnicas de resolução. Entretanto no caso de EDOs não-lineares de segunda ordem não podemos desfrutar do mesmo privilégio. Isso porque as EDOs não-lineares de ordem superior são mais difíceis de serem resolvidas, mesmo que algumas delas possuam soluções. Por isso, neste Capítulo nos restringimos as EDOs lineares de segunda ordem.

Vimos no Capítulo 1 a forma geral (1.2) das equações diferenciais lineares de ordem n .

No caso em que $n = 2$, teremos

$$a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (3.3)$$

ou seja, uma EDO linear de segunda ordem. Lembrando que as funções coeficientes $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ e $g(x)$ são contínuas em um determinado intervalo I , onde $a_2(x) \neq 0$.

Dividindo (3.3) por $a_2(x)$, obtemos

$$\frac{a_2(x) d^2y}{a_2(x) dx^2} + \frac{a_1(x) dy}{a_2(x) dx} + \frac{a_0(x)}{a_2(x)} y = \frac{g(x)}{a_2(x)}, \quad (3.4)$$

e, chamando $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}$, $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}$ e $\frac{g(x)}{a_2(x)}$ respectivamente de $p(x)$, $q(x)$ e $f(x)$, podemos reescrever

(3.4) de uma forma mais compacta, como sendo $\frac{d^2y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x)$ ou

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (3.5)$$

Quando $f(x) = 0$ então (3.5) é dita **homogênea**, ou seja, a equação

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (3.6)$$

é uma EDO linear de segunda ordem homogênea. Caso $f(x) \neq 0$ então (3.5) é dita **não-homogênea**.

Exemplo 3.1: A equação $3y'' + 7y' - 5y = 0$ é uma EDO linear de segunda ordem homogênea. A equação $xy'' - 5xy' + 6y = e^x$ é uma EDO linear de segunda ordem não-homogênea.

Veremos nesse Capítulo que para resolvermos uma equação não-homogênea, devemos primeiro resolver a equação homogênea associada, ou seja, uma vez resolvida a equação homogênea, sempre é possível resolver a equação não-homogênea correspondente ou, pelo menos, expressar sua solução em função de uma integral. Assim, o problema de resolver uma equação homogênea é o mais fundamental (Boyce e Diprima, 2001, p. 70.)

PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

Para uma EDO linear de 2ª ordem temos a seguinte situação do PVI:

$$\begin{cases} \text{Resolva: } a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ \text{Sujeito a: } y(x_0) = y_0, \quad y'_0 = y'_0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Observemos que o PVI de uma EDO linear de segunda ordem exige duas condições iniciais. A solução para esse PVI é uma função que satisfaça a EDO em certo intervalo I que contenha o ponto x_0 , e que cujo gráfico da solução, passa pelo ponto (x_0, y_0) com inclinação igual a y'_0 .

Note que as condições iniciais para uma equação de segunda ordem não indicam, apenas, um ponto particular (t_0, y_0) que tem que pertencer ao gráfico da solução, mas, também, o coeficiente angular y'_0 da reta tangente ao gráfico naquele ponto. É razoável esperar que sejam necessárias duas condições iniciais para uma equação de segunda ordem, já que, grosso modo, precisa-se de duas integrações para se encontrar a solução e cada integração introduz uma constante arbitrária. Presume-se que duas condições iniciais serão suficientes para a determinação dos valores dessas duas constantes. (Boyce e Diprima, 2001, p.70.)

O Teorema 3.1 a seguir, nos garante a existência de uma única solução para (3.7) (Zill e Gullen, 2001, p.143).

Teorema 3.1 Existência de uma Única Solução
--

Sejam $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ não todos nulos e $g(x)$ contínuas em um intervalo I , para todo x neste intervalo. Se $x = x_0$ é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução $y(x)$ para o PVI (3.7) neste intervalo.

Exemplo 3.2: Verifique se a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução para o PVI $y'' - 4y = 12x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$. Resolução: Temos que verificar se a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução da EDO dada com os valores das condições iniciais: $y(0) = 4$ e $y'(0) = 1$. Primeiro vamos verificar se y é realmente a solução da EDO. Para isso vamos achar as derivadas de y de primeira e segunda ordem respectivamente, logo

$$y' = 6e^{2x} - 2e^{-2x} - 3$$

$$y'' = 12e^{2x} + 4e^{-2x}.$$

Substituindo os valores na EDO, obtemos

$$y'' - 4y = 12x$$

$$(12e^{2x} + 4e^{-2x}) - 4(3e^{2x} + e^{-2x} - 3x) = 12x$$

$$12e^{2x} + 4e^{-2x} - 12e^{2x} - 4e^{-2x} + 12x = 12x$$

$$12x = 12x.$$

Segundo, vamos verificar se as condições iniciais do PVI estão corretas

$$y(0) = 3e^{2(0)} + e^{-2(0)} - 3(0) = 3 + 1 - 0 = 4$$

$$y'(0) = 6e^{2(0)} - 2e^{-2(0)} - 3 = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Portanto, como os coeficientes da EDO são contínuos em qualquer intervalo contendo $x = 0$, podemos concluir a partir do Teorema 3.1, que a função dada é a única solução do PVI dado.

O WRONSKIANO

Neste tópico apresentaremos importantes definições e conceitos, que serão úteis nos estudos de EDOs lineares de segunda ordem. Antes de definir o que é o Wronskiano, precisamos definir outros dois importantes conceitos: Dependência e Independência Linear entre funções.

Definição 3.1 Dependência Linear

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é **linearmente dependente** (LD) em um intervalo I se existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n não todas nulas, tais que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$ para todo x no intervalo.

Exemplo 3.3: As funções $f_1(x) = \sqrt{x} + 5$, $f_2(x) = \sqrt{x} + 5x$, $f_3(x) = x - 1$ e $f_4(x) = x^4$ são LD no intervalo $(0, \infty)$, pois f_2 pode ser escrita como uma combinação linear de f_1, f_3 e f_4 , ou seja, $f_2(x) = (1)f_1(x) + (5)f_3(x) + (0)f_4(x)$ para todo x no intervalo $(0, \infty)$. Em um caso específico, se duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são LD, então isso significa que uma pode ser escrita como o produto da outra por uma constante.

Definição 3.2 Independência Linear

Dizemos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ é **linearmente independente** (LI) em um intervalo I , se ele não é LD no intervalo, ou seja se as constantes c_1, c_2, \dots, c_n são ambas iguais e todas nulas, tais que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \dots + c_nf_n(x) = 0$, para todo x no intervalo.

Exemplo 3.4: As funções $f_1(x) = e^x$ e $f_2(x) = e^{2x}$ são LI em qualquer intervalo. De fato, se tivermos as constantes c_1 e c_2 tais que $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) = 0$ e $c_1e^x + c_2e^{2x} = 0$, podemos observar que os valores para $f_1(x)$ e $f_2(x)$ serão diferentes de zero para qualquer que seja o valor de x e portanto a única solução possível é a solução trivial, onde $c_1 = c_2 = 0$.

A seguir veremos um teorema (Zill e Gullen, 2001, p. 149), que corresponde a um critério para independência linear de funções:

Teorema 3.2 Critério para Independência Linear de Funções

Suponha que $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ sejam diferenciáveis pelo menos $n - 1$ vezes. Se o

$$\text{determinante} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \text{ for diferente de zero em pelo menos um}$$

ponto do intervalo I , então as funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ são LI em I .

O determinante do teorema anterior é denotado por $W(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ e é chamado de o **Wronskiano** das funções $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$. Em seguida apresentamos a demonstração do Teorema 3.2, no caso em que $n = 2$.

Demonstração:

Como $n = 2$, temos duas funções, $f_1(x)$ e $f_2(x)$. Suponhamos por absurdo que quando $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$, para um certo valor de x_0 fixado em algum intervalo I , as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sejam LD nesse intervalo. De fato, se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são LD, então existem constantes c_1 e c_2 não ambas nulas, tais que $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ para todo x no intervalo I . Se derivarmos essa combinação, obteremos $c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0$. Com isso, chegamos a um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0 \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Como f_1 e f_2 são funções LD, logo (3.8) possui uma solução não trivial, para cada x no intervalo. Assim, $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = 0$ para todo x pertencente ao intervalo I . O que é um absurdo, pois por hipótese temos $W(f_1(x_0), f_2(x_0)) \neq 0$. Portanto f_1 e f_2 são funções LI.

Exemplo 3.5: As funções $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$ e $f_3(x) = x^2e^x$ são LI em qualquer intervalo do eixo x , pois o Wronskiano, $W(e^x, xe^x, x^2e^x) =$

$$\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & xe^x + e^x & x^2e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix} = 2e^{3x} \text{ não se anula em ponto algum.}$$

EDOS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM HOMOGÊNEAS

Como vimos anteriormente nesse Capítulo, uma EDO linear de segunda ordem homogênea tem como forma a expressão em (3.6). Uma característica particularmente útil da equação linear homogênea é o fato de que a soma, ou **superposição**, de quaisquer duas ou mais soluções de (3.6) é novamente uma solução. Esta é a ideia do teorema a seguir (Zill e Gullen, 2001, p. 153):

Teorema 3.3 Princípio de Superposição

Sejam y_1, y_2, \dots, y_k soluções para a EDO linear de n -ésima ordem homogênea (3.6) em um intervalo I . Então, a combinação linear

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_k y_k(x) \quad (3.9)$$

em que c_i , $i = 1, 2, \dots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo.

Demonstração: Provaremos esse teorema para o caso em que $n = k = 2$, isso por estarmos discutindo as EDOs de segunda ordem. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções da EDO

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \quad (3.10)$$

Como $n = k = 2$, temos $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Derivando essa última equação duas vezes, teremos

$$y' = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \quad (3.11)$$

e

$$y'' = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x). \quad (3.12)$$

Substituindo (3.11) e (3.12) em (3.10), obteremos

$$\begin{aligned} a_2(x)[c_1 y_1'' + c_2 y_2''] + a_1(x)[c_1 y_1' + c_2 y_2'] + a_0(x)[c_1 y_1 + c_2 y_2] = \\ c_1 [a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + c_2 [a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2] = \\ c_1(0) + c_2(0) = 0, \end{aligned}$$

pois $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções. Portanto $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ é também uma solução.

Exemplo 3.6: Podemos verificar que $y_1(x) = \cos x$ e $y_2(x) = \text{sen } x$ são duas soluções da equação homogênea $y'' + y = 0$. O Teorema 3.3 nos garante que qualquer combinação linear destas soluções, por exemplo, $y = 3y_1 - 2y_2 = 3 \cos x - 2 \text{sen } x$ será também uma solução. Deste modo, podemos concluir que toda solução de $y'' + y = 0$ é uma combinação linear destas duas soluções particulares y_1 e y_2 . Portanto, a solução geral de $y'' + y = 0$ é $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \text{sen } x$.

SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES

Nas resoluções das EDOs homogêneas (3.6), queremos soluções linearmente independentes. Vimos que o Wronskiano de duas funções LI é diferente de zero. Discutiremos agora o fato de que se duas funções y_1 e y_2 são soluções de uma EDO linear de segunda ordem homogênea, então o seguinte Teorema é válido (Edwards e Penney, 1993, p. 88):

Teorema 3.4 Wronskiano de Soluções

Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da equação (3.6) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, num intervalo aberto I no qual p e q são contínuas.

a) Se y_1 e y_2 são LD, então $W(y_1, y_2) = 0$ em I ;

b) Se y_1 e y_2 são LI, então $W(y_1, y_2) \neq 0$ em cada ponto de I .

Assim, de acordo com o Teorema 3.4, o Wronskiano não se anula se as soluções são LI. Quando temos duas soluções y_1 e y_2 LI de (3.6), então $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ será uma solução geral da equação (3.6). Esse último resultado é formalizado no Teorema 3.5 (Edwards e Penney, 1993, p. 88):

Teorema 3.5 Soluções Gerais

Sejam y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes da equação (3.6) $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ com p e q contínuas no intervalo aberto I . Se Y é qualquer solução da equação (3.6), então existem números c_1 e c_2 tais que $Y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ para todo x em I .

O Teorema 3.5 diz que se encontrarmos duas soluções LI da equação (3.6), então, podemos encontrar todas as suas soluções.

Demonstração: Seja a um ponto pertencente ao intervalo I , e considere as seguintes equações simultâneas

$$\begin{cases} Y(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) \\ Y'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) \end{cases} \quad (3.13)$$

O determinante dos coeficientes desse sistema de equações lineares nas incógnitas c_1 e c_2 é simplesmente o Wronskiano $W(y_1, y_2)$ avaliado em a . Pelo Teorema 3.4, esse determinante não é nulo, assim por álgebra elementar segue-se que das equações do sistema (3.13) podem ser encontradas as constantes c_1 e c_2 . Com estes valores encontrados definimos a solução

$$G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

da equação (3.6). Então

$$G(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = Y(a)$$

e

$$G'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = Y'(a).$$

Portanto, as duas soluções Y e G têm os mesmos valores iniciais em a , assim como Y' e G' . Pela unicidade de uma solução determinada por tais valores iniciais (Teorema 3.1), segue-se que Y e G são iguais em I . Vemos então que

$$Y(x) \equiv G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x).$$

Exemplo 3.7: As duas soluções $y_1 = e^{3x}$ e $y_2 = e^{-3x}$ são ambas da seguinte EDO linear homogênea de segunda ordem $y'' - 9y = 0$. Como $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq$

0 para todo valor de x no intervalo $(-\infty, \infty)$, então, a solução geral para a EDO dada é $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}$.

EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIENTES CONSTANTES

Discutiremos agora as EDOs lineares homogêneas de segunda ordem do tipo

$$ay'' + by + c = 0. \quad (3.14)$$

onde os coeficientes a, b e c são ambos constantes. Nesse caso, o fato surpreendente é que todas as soluções para (3.14) são funções exponenciais ou construídas a partir de funções exponenciais (Zill e Gullen, 2001, p. 153).

EQUAÇÃO AUXILIAR

Vamos nos preocupar inicialmente em achar uma única solução da equação (3.14). Observemos antes disso que

$$(e^{mx})' = me^{mx} \text{ e } (e^{mx})'' = m^2 e^{mx}, \quad (3.15)$$

para qualquer valor de m . Assim podemos concluir que qualquer derivada de e^{mx} é um múltiplo constante de e^{mx} . Portanto, se substituirmos $y = e^{mx}$ em (3.15), cada termo seria um múltiplo constante de e^{mx} , com os coeficientes constantes dependentes de m e dos coeficientes a, b e c , ou seja, $m^2 e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0$ ou $e^{mx}(am^2 + bm + c)$.

Isso nos leva a tentar encontrar o valor de m de modo que esses múltiplos de e^{mx} tenham soma igual a zero (para satisfazer a igualdade de (3.14)). Lembrando que $e^{mx} \neq 0$ para valores reais de x , então a única chance dessa função exponencial ser uma solução de (3.14) é se conseguirmos encontrar o valor de m , de tal forma que ela seja a raiz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0. \quad (3.16)$$

Essa última equação é chamada de equação auxiliar ou equação característica da equação (3.14).

Vamos discutir agora as possibilidades das raízes da equação (3.16). Temos que considerar três casos (Zill e Gullen, 2001, p. 173): Raízes Reais Distintas; Raízes Reais Iguais; Raízes Complexas Conjugadas.

Caso 1: Raízes Reais Distintas

Se as duas raízes m_1 e m_2 da equação (3.16) são reais e distintas, então

$$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \quad (3.17)$$

é a solução geral da equação (3.14).

Exemplo 3.8: Encontre uma solução geral de $2y'' - 7y' + 3y = 0$. Resolução: Temos que a equação característica da EDO dada é $2m^2 - 7m + 3 = 0$. Ou $(2m - 1)(m - 3) = 0$. É fácil perceber que as raízes da equação característica são $m_1 = \frac{1}{2}$ e $m_2 = 3$, que são reais e distintas.

Logo teremos a seguinte solução geral para a EDO dada: $y(x) = c_1 e^{\frac{x}{2}} + c_2 e^{3x}$.

Caso 2: Raízes Reais Iguais

Se a equação (3.16) tem raízes reais iguais $m_1 = m_2$, então

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{m_1 x} \quad (3.18)$$

é a solução geral da equação (3.14).

Exemplo 3.9: Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = 5 \quad y'(0) = -3 \end{cases}$. Resolução:

Observamos primeiro que a equação característica $m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2 = 0$, tem raízes reais e iguais a $m_1 = m_2 = -1$. Portanto a solução geral da EDO dada será $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$. Se derivarmos sua solução geral, chegamos em $y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}$. Assim as condições iniciais do PVI, nos fornecem as seguintes equações:

$$y(0) = (c_1 + c_2(0))e^{-0} = c_1 = 5 \Rightarrow c_1 = 5$$

$$y'(0) = -c_1 e^{-0} + c_2 e^{-0} - c_2(0)e^{-0} = -c_1 + c_2 = -3 \Rightarrow c_1 + c_2 = -3$$

o que implica em $c_1 = 5$ e $c_2 = 2$. Então a solução desejada do PVI é $y(x) = (5 + 2x)e^{-x}$.

Caso 3: Raízes Complexas Conjugadas

Se a equação (3.16) tem as raízes m_1 e m_2 complexas, onde $m_1 = \alpha + \beta i$ e

$m_2 = \alpha - \beta i$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) \quad (3.19)$$

é a solução geral da equação (3.14).

Exemplo 3.10: Resolva a equação diferencial $y'' - 10y' + 41y = 0$. Resolução: As raízes da equação característica $m^2 - 10m + 41 = 0$ são $m = 5 \pm 4i$, ou seja, raízes complexas. Portanto pelo Caso 3, obtemos a seguinte solução geral para a EDO dada: $y(x) = e^{5x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$.

EDOS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM NÃO-HOMOGÊNEAS

Vimos que a equação (3.5) $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ é dita não-homogênea quando $f(x) \neq 0$.

Discutiremos agora a solução geral de uma EDO linear não-homogênea de segunda ordem. Pelo que já foi dito, para se resolver uma EDO não-homogênea primeiro é preciso resolver a equação homogênea associada.

É importante destacar que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de (3.5), então $y_1(x) - y_2(x)$ também será uma solução de (3.6) (Figueiredo, 2002, p. 99).

Logo, se conhecermos uma **solução particular** $y_p(x)$ de (3.5), então uma solução geral de (3.5), será dada por $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e y_1 e y_2 é um par de soluções LI de (3.6).

Mas o que seria essa solução particular $y_p(x)$? é qualquer função que é uma solução de (3.5), independente de qualquer parâmetro. Algumas vezes $y_p(x)$ é chamada de **integral particular**.

Exemplo 3.11: Uma solução particular para $y'' + 4y = 12x$ é $y_p(x) = 3x$, pois $y_p''(x) = 0$ e $0 + 4y_p = 0 + 4(3x) = 12x$.

Vejamos o seguinte Teorema (Zill e Gullen, 2001, p. 159) de Solução de Equações Não-homogêneas, no caso em que a EDO é de segunda ordem:

Teorema 3.6 Solução de Equações Não-homogêneas
Sejam y_1 e y_2 soluções para a EDO linear homogênea de segunda ordem (3.6) em um intervalo I , e seja y_p qualquer solução para a equação não-homogênea (3.5) no mesmo intervalo. Então, $Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$ é também uma solução para a equação não-homogênea no intervalo para quaisquer constantes c_1 e c_2 .

A combinação linear $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ que é a solução geral da equação (3.6), é chamada de **função complementar** para a equação (3.5). Podemos dizer de uma forma mais compacta, que a solução geral para uma EDO linear não-homogênea é

$$Y = y_c(x) + y_p(x). \quad (3.20)$$

$Y =$ função complementar + qualquer solução particular.

Exemplo 3.12: Encontre a solução geral da EDO linear não-homogênea $y'' + 4y = 12x$.

Resolução: Vimos no exemplo anterior que uma solução particular de $y'' + 4y = 12x$ é $y_p(x) = 3x$. Agora, vamos achar a função complementar, e para isso vamos considerar a EDO homogênea associada $y'' + 4y = 0$. Temos que a equação característica dessa EDO é $m^2 + 4 = 0$. Assim, podemos chegar facilmente que as raízes (complexas) da equação característica serão $m_1 = 2i$ e $m_2 = -2i$. Chegamos então, no Caso 3 de EDOs homogêneas de coeficientes

constantes, cujo formato da solução geral é $y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$. Como $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, a solução geral da EDO homogênea associada (que é a função complementar) é $y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$. Logo, a solução geral da EDO proposta no exercício será $y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 3x$.

Nesse caso a função particular foi facilmente deduzida. Entretanto em muitas situações, a obtenção da função particular $y_p(x)$ não é tão imediata assim.

Veremos adiante dois métodos práticos que são utilizados para se obter $y_p(x)$. Esses métodos são conhecidos como o método dos coeficientes indeterminados e o método da variação de parâmetros.

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Como vimos, uma solução para uma EDO não-homogênea de segunda ordem (3.5) tem a forma (3.20). Portanto resolver (3.5) exige dois passos:

- 1- Achar a função complementar $y_c(x)$.
- 2- Encontrar, seja qual for, uma solução particular $y_p(x)$ da EDO não-homogênea.

Um dos meios para se encontrar $y_p(x)$ é chamado de Método dos Coeficientes Indeterminados, que também é chamado de Método dos Coeficientes a Determinar. Entretanto existem alguns limites para esse método, pois ele só pode ser aplicado quando a equação (3.5) tem seus coeficientes constantes e $g(x)$ se limita apenas em: um polinômio em x ; uma função exponencial e^{kx} ; um função do tipo $\cos kx$ ou $\sin kx$; ou também na soma ou produto dessas funções.

Assim $g(x)$ é uma combinação linear de funções do tipo (Zill e Gullen, 2001, p.183) k (constante), x^n , $x^n e^{x\alpha} \cos \beta x$ e $x^n e^{x\alpha} \sin \beta x$, em que n é um inteiro não negativo e α e β são números reais.

Essas funções têm a importante característica de que suas derivadas de somas ou produtos são somas ou produtos das mesmas funções. A grande jogada do método dos coeficientes indeterminados está na exploração das características dessas funções, pois como a combinação linear das derivadas $ay_p'' + by_p' + cy_p$ tem que ser identicamente igual a $g(x)$, assim y_p tem a mesma forma que $g(x)$.

O método dos coeficientes indeterminados requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular $Y(x)$, mas com os coeficientes não especificados. Substituímos, então, a expressão hipotética na equação (3.5) e tentamos determinar os coeficientes de modo que a equação seja satisfeita. Se tivermos sucesso, teremos encontrado uma solução da equação (3.5)

e podemos usá-la como a solução particular de $Y(x)$. Caso contrário, se não pudermos determinar os coeficientes, isso significa que não existe solução da forma que supusemos. Nesse caso, temos que modificar a hipótese inicial e tentar de novo. (Boyce e DiPrima, 2001, p.91).

Veremos agora o Teorema 3.7 que nos auxilia na busca da função particular $y_p(x)$ (Zill e Gullen, 2001, p. 161):

Teorema 3.7 Princípio de Superposição – Equações não-homogêneas

Sejam $y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pk}$ soluções particulares para a EDO linear homogênea de segunda ordem (3.5) em um intervalo I , correspondendo a k funções distintas g_1, g_2, \dots, g_k qualquer. Isto é, suponha que y_{pi} seja uma solução particular para a EDO correspondente $a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_i(x)$ em que $i = 1, 2, \dots, k$. Então, $y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pk}(x)$ é uma solução particular para $a_2(x) \frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_1(x) + g_2(x) + \dots + g_k(x)$.

Exemplo 3.13: Resolva

$$y'' - y' - 2y = 4x^2. \quad (3.21)$$

Resolução: Temos que a equação homogênea associada é $y'' - y' - 2y = 0$. Como vimos anteriormente, a solução dessa última equação chamada de função complementar é $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$. Temos que $g(x) = 4x^2$ é um polinômio do segundo grau. Isso nos leva a tentar o uso do método dos coeficientes indeterminados, e supor que a função particular $y_p(x)$, também tem a forma de um polinômio de segundo grau. Então $y_p(x)$ terá a seguinte forma

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C. \quad (3.22)$$

onde A, B e C são constantes arbitrárias pertencente aos reais.

Assim, $y_p'(x) = 2Ax + B$ e $y_p''(x) = 2A$. Substituindo esses valores na equação (3.21), obtemos $2A - (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$, ou equivalentemente, $-2Ax^2 + (-2A - 2B)x + (2A - B - 2C) = 4x^2 + (0)x + 0$. Identificando os coeficientes, chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} -2A = 4 \\ -2A - 2B = 0 \\ 2A - B - 2C = 0 \end{cases}. \quad (3.23)$$

As soluções de (3.23) são: $A = -2, B = 2, C = -3$. Substituindo esses valores em (3.22), obtemos a seguinte solução particular $y_p(x) = -2x^2 + 2x - 3$. Como a solução geral de uma

EDO de segunda ordem não-homogênea é dada por $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$, então teremos a seguinte solução geral do problema apresentado $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3$.

Observamos que em (3.22) fizemos uma suposição da forma como a função particular se apresentaria. Na Tabela 3 são apresentadas sugestões de tentativas coerentes como essa. Considerando, por garantia, que nenhuma função da suposta solução particular y_p faça parte da função complementar y_c (Zill e Gullen, 2001, p. 188).

Tabela 3: Tentativas para Soluções Particulares

$g(x)$	Forma de y_p
1. (qualquer constante)	A
2. $5x + 2$	$Ax + B$
3. $3x^2 - 2$	$Ax^2 + Bx + C$
4. $x^3 - x + 1$	$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$
5. $\text{sen } 4x$	$A \cos 4x + B \text{ sen } 4x$
6. $\cos 4x$	$A \cos 4x + B \text{ sen } 4x$
7. e^{5x}	Ae^{5x}
8. $(9 - 2)e^{5x}$	$(Ax + B)e^{5x}$
9. $x^2 e^{5x}$	$(Ax^2 + Bx + C)e^{5x}$
10. $e^{3x} \text{ sen } 4x$	$Ae^{3x} \cos 4x + Be^{3x} \text{ sen } 4x$
11. $5x^2 \text{ sen } 4x$	$(Ax^2 + Bx + C) \cos 4x$ $+ (Dx^2 + Ex + F) \text{ sen } 4x$
12. $xe^{3x} \cos 4x$	$(Ax + B)e^{3x} \cos 4x + (Cx + D)e^{3x} \text{ sen } 4x$

Exemplo 3.14: Resolva $y'' - y' - 2y = \text{sen } 2x$. Resolução: Já vimos no Exemplo 3.13 que a função complementar dessa equação é $y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$. Temos que $g(x) = \text{sen } 2x$. Assim, a melhor tentativa para y_p , segundo a Tabela 3 é

$$y_p = A \cos 2x + B \text{ sen } 2x. \quad (3.24)$$

Logo, $y_p'(x) = -2A \text{ sen } 2x + 2B \cos 2x$ e $y_p''(x) = -4A \cos 2x - 4B \text{ sen } 2x$.

Substituindo esses valores na equação obtemos $-2(A \cos 2x + B \text{ sen } 2x) = \text{sen } 2x$ ou equivalente

$$(2B - 6A) \text{ sen } 2x + (-6A - 2B) \cos 2x = (1) \text{ sen } 2x + (0) \cos 2x.$$

Identificando os coeficientes obtemos o seguinte sistema $\begin{cases} 2B - 6A = 1 \\ -6A - 2B = 0 \end{cases}$. Resolvendo o

sistema obteremos $A = \frac{1}{20}$ e $B = -\frac{3}{20}$. Substituindo esses valores em (3.24) obteremos a seguinte função partícula da EDO não-homogênea $y_p = \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{3}{20} \operatorname{sen} 2x$. Assim, a solução geral da EDO será $y(x) = \frac{1}{20} \cos 2x - \frac{3}{20} \operatorname{sen} 2x + c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.

Veremos agora no Exemplo 3.15, que a forma suposta da solução particular duplica uma solução da equação homogênea associada, ou seja, y_p irá fazer parte da função complementar y_c , mas por uma manipulação algébrica podemos adulterar esse resultado.

Se a forma suposta da solução duplica uma solução da equação homogênea associada, então, devemos modificar a sua hipótese multiplicando a suposta solução particular pela variável independente x . Em algumas situações, essas modificações não serão suficientes (como acontecerá no próximo exemplo) para remover todas as duplicações das soluções da EDO homogênea, caso em que é necessário, multiplicar por x uma segunda vez. Para uma EDO de segunda ordem, nunca é necessário continuar esse processo. (Boyce e DiPrima, 2001, p. 93).

Exemplo 3.15: Resolva $y'' - 6y' + 9y = 6x^2 + 2 - 12e^{3x}$. Resolução: Como vimos anteriormente, a função complementar é $y_c = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$. Analisando as entradas 3 e 7 da tabela, a escolha usual para uma solução particular seria $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{3x}$, e pelo princípio de superposição $y_p = y_{p1} + y_{p2}$, onde $y_{p1} = Ax^2 + Bx + C$ e $y_{p2} = De^{3x}$. Entretanto, inspecionando essas funções, vemos que um termo em y_{p2} coincide com um termo de y_c . Se multiplicarmos y_{p2} por x , notamos que o termo $x e^{3x}$ é ainda parte de y_c . Mas multiplicando y_{p2} por x^2 eliminamos todas as duplicações. Logo, a forma eficaz de uma solução particular é $y_p = Ax^2 + Bx + C + Dx^2 e^{3x}$.

Derivando esta última equação duas vezes, substituindo esses resultados na EDO e agrupando os termos, obtemos,

$$\begin{aligned} y_p'' - 6y_p' + 9y_p &= 9Ax^2 + (-12A + 9B)x + 2A - 6B + 9C + 2De^{3x} \\ &= 6x^2 + 2 - 12e^{3x}. \end{aligned}$$

Segue-se dessa identidade que $A = \frac{2}{3}$, $B = \frac{8}{9}$, $C = \frac{2}{3}$, e $D = -6$. Portanto, a solução geral $y = y_c + y_p$ é $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{2}{3} x^2 + \frac{8}{9} x + \frac{2}{3} - 6x^2 e^{3x}$.

VARIAÇÃO DE PARÂMETROS

Veremos agora nesta seção outro método para determinar uma solução particular de (3.5). Diferente do método dos coeficientes indeterminados o método da variação de parâmetros não se restringe a apenas algumas funções ou combinações lineares das mesmas, ele se aplica a todas as equações lineares.

Consideramos a EDO linear de segunda ordem não-homogênea (3.5), ou seja, $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$, onde p , q e f são funções contínuas dadas. Vamos supor que conhecemos a função complementar $y_c(x)$, que tem a forma $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

A principal ideia para acharmos uma função (solução) particular $y_p(x)$ de (3.5) é escrevermos ela da mesma forma da função complementar, só que transformando os coeficientes c_1 e c_2 em funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ respectivamente, ou seja,

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \quad (3.25)$$

O problema agora se resume em encontrar as funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$. Derivando (3.25), temos

$$y_p'(x) = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x). \quad (3.26)$$

Vamos igualar a zero a soma dos termos envolvendo $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$, ou seja, vamos supor que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (3.27)$$

Logo a equação (3.26) se resume a

$$y_p'(x) = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \quad (3.28)$$

Derivando (3.28) obtemos,

$$y_p''(x) = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x). \quad (3.29)$$

Agora, Substituindo (3.25), (3.28) e (3.29) na equação (3.5), e já agrupando os termos $u_1(x)$ e $u_2(x)$ teremos

$$u_1(x)[y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)] + u_2(x)[y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)] + u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x).$$

Observamos que cada uma das expressões entre colchetes da última equação é nula, pois ambas as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO homogênea (3.6). Logo, teremos apenas

$$u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (3.30)$$

As Equações (3.27) e (3.30) formam um sistema de duas equações lineares algébricas, para as derivadas $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$ das funções desconhecidas,

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad (3.31)$$

Temos que resolver o sistema para descobrir quem são as “incógnitas” $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$. Vamos fazer isso pela regra de Cramer.

Seja A a matriz dos coeficientes de (3.31), assim

$$\det A = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x). \quad (3.32)$$

Logo, $\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = -y_2(x)f(x)$ e $\det A_2 = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix} = y_1(x)f(x)$. Então, pela regra de Cramer teremos as respectivas soluções

$$u_1'(x) = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad u_2'(x) = \frac{\det A_2}{\det A}. \quad (3.33)$$

Observamos que $\det A = W(y_1(x), y_2(x))$, ou seja, $\det A$ é o wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$. Notamos ainda que a divisão por W é permitida, pois como $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da EDO homogênea (3.6) então elas são LI, e segue que o wronskiano não se anula. Podemos reescrever (3.33) como sendo,

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}, \quad u_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1(x), y_2(x))}. \quad (3.34)$$

Integrando (3.34) encontraremos as funções desejadas $u_1(x)$ e $u_2(x)$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx + c_1, \quad u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx + c_2. \quad (3.35)$$

Finalmente, substituindo (3.35) em (3.25), obtemos uma solução particular para (3.5). Vejamos agora esse resultado enunciado como um teorema (Boyce e Diprima, 2001, p.98).

Teorema 3.8

Se as funções p, q e f são contínuas em um intervalo aberto I e se as funções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções linearmente independentes da EDO homogênea (3.6) associada a EDO não-homogênea (3.5), então uma solução particular da equação (3.5) é

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx + y_2(x) \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(y_1(x), y_2(x))} dx \quad (3.36)$$

e sua solução geral é

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x). \quad (3.37)$$

Exemplo 3.16: Resolva $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. Resolução: Notemos que a equação homogênea associada da EDO não-linear é $y'' - 2y' + y = 0$, cuja solução geral é $y_c(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$.

Agora, para obtermos uma solução particular $y_p(x)$ da EDO, não podemos usar o método dos coeficientes, pois $\frac{e^x}{x}$ não é contínua em $x = 0$, assim temos que usar o método da variação de parâmetros, discutido nessa seção. Sendo $u_1(x)$ e $u_2(x)$ os parâmetros variáveis teremos,

$$y_p = u_1(x)e^x + u_2(x)xe^x. \quad (3.38)$$

Lembrando que $y_1(x) = e^x$ e $y_2(x) = xe^x$ e $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Decorre de (3.27) e de (3.30) o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_1'(x)e^x + u_2'(x)xe^x = 0 \\ u_1'(x)e^x + u_2'(x)(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x}. \end{cases} \quad (3.39)$$

Resolvendo esse sistema pela regra de Cramer obtemos,

$$u_1'(x) = -1 \text{ e } u_2'(x) = \frac{1}{x}. \quad (3.40)$$

Integrando as duas equações de (3.40) em ambos os lados da equação e resolvendo-as, obtemos os seguintes valores para $u_1(x)$ e $u_2(x)$: $u_1(x) = \int u_1'(x) dx = \int -1 dx = -x \Rightarrow u_1(x) = -x$ e $u_2(x) = \int u_2'(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Rightarrow u_2(x) = \ln(x)$.

Substituindo os valores encontrados dos parâmetros variáveis $u_1(x)$ e $u_2(x)$ em (3.38), vem $y_p = -xe^x + \ln(x)xe^x$. Assim, teremos a seguinte solução geral da EDO dada:

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1e^x + c_2xe^x - xe^x + \ln(x)xe^x \\ &= c_1e^x + (c_2 - 1)xe^x + \ln(x)xe^x \\ &= c_1e^x + c_3xe^x + \ln(x)xe^x, \end{aligned}$$

com $(c_2 - 1) = c_3$.

APLICAÇÕES DE EDOS NA MODELAGEM DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Veremos nesse capítulo aplicações de EDOs em alguns circuitos elétricos. Antes de entrarmos na aplicação propriamente dita, veremos alguns conceitos, e elementos de eletricidade para nos auxiliar no nosso estudo de aplicação.

ELEMENTOS DE UM CIRCUITO

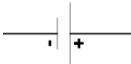
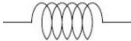


Um circuito elétrico é um modelo matemático que se comporta aproximadamente como um sistema elétrico real (Nilsson e Susan, 2008, p. 3).

A ideia principal de um circuito é ter cargas em movimento que podem constituir um caminho fechado. Um caminho fechado para uma carga em movimento se chama circuito.

Resolver um circuito é calcular as correntes nele. No nosso estudo analisaremos circuitos no qual suas correntes variam com o tempo.

Em um circuito elétrico podem existir alguns elementos que possuem características e funções próprias para o mesmo. Vejamos na tabela abaixo, as grandezas envolvidas nos circuitos do nosso estudo, com algumas informações importantes:

Tabela 4. Elementos de Eletricidade.

Grandeza	Símbolo	Unidade
f.e.m. (força eletromotriz)		volt (V)
Indutância		henry (H)
Capacitância		farad (F)
Resistência		ohm (Ω)
Corrente		ampère (A)
Carga		coulomb (C)

FORÇA ELETROMOTRIZ

Uma força eletromotriz (f.e.m.) é qualquer dispositivo que aumenta a energia potencial das cargas que circulam no circuito (Serway e Jewett, 1996, p.121).

De uma maneira bem intuitiva a f.e.m. indica a energia fornecida (pela bateria ou gerador) aos elétrons.

Vejamos agora a definição de Força Eletromotriz:

Definição 4.1 Força Eletromotriz

A força eletromotriz ε de uma fonte (geradores, baterias e etc.) é o trabalho dW , ou seja, a energia recebida, por unidade de carga dq , que a fonte realiza para transferir cargas do terminal de baixo potencial para o terminal de alto potencial. Definimos a f.e.m. da fonte através desse trabalho:

$$\varepsilon = \frac{dW}{dq}. \quad (4.1)$$

Antes de definirmos os outros elementos dos circuitos precisamos destacar algumas observações referente a f.e.m..

Se tratando de uma fonte real, quando um elétron está inserido na fonte, ele recebe certa quantidade de energia. Entretanto uma pequena fração de energia é dissipada dentro da própria fonte. Assim quando o elétron sai da fonte, sua energia é menor do que a energia recebida. A energia real, na qual o elétron sai e está sujeito, é chamada de Diferença de Potencial (d.d.p.).

A definição da d.d.p. é praticamente a mesma que a Definição 4.1. O que muda é que a f.e.m. nos indica a energia que o elétron recebeu, enquanto que a d.d.p. nos indica qual a energia com que o mesmo saiu.

Nesse estudo vamos considerar uma fonte ideal, isto é, uma fonte na qual a energia do elétron não se dissipa na própria fonte, mas sim nos outros elementos do circuito do nosso estudo (resistores, capacitores e indutores).

Para produzir uma corrente estável precisamos de uma “bomba” de cargas, um dispositivo que, realizando trabalho sobre os portadores de carga, mantenha uma diferença de potencial entre dois terminais. Um dispositivo desse tipo é chamado de **fonte de tensão**, ou simplesmente **fonte**. Dizemos que uma fonte de tensão produz uma **força eletromotriz** \mathcal{E} , o que significa que submetemos os portadores de carga a uma diferença de potencial (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 167).

CORRENTE ELÉTRICA

A f.e.m. é responsável por gerar a corrente elétrica no circuito. A corrente elétrica é o movimento ordenado das partículas com cargas elétricas.

São inúmeros os efeitos da corrente elétrica, por exemplo, nas instalações elétricas prediais e residenciais, tendo uma corrente elétrica, a lâmpada se acende e se aquece com certa intensidade. Outro exemplo está ligado a um fenômeno natural, o raio é uma corrente elétrica que pode existir entre nuvens ou entre nuvens e o solo.

Por convenção, o sentido da corrente em circuitos elétricos é oposto ao movimento dos elétrons. A seta da corrente é desenhada no sentido em que portadores de carga positivos se moveriam, mesmo que os portadores sejam negativos e se movam no sentido oposto (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 142).

Definição 4.2 Corrente Elétrica

Se uma carga dq passa para um plano hipotético em um intervalo de tempo dt a corrente I nesse plano é definida como

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (4.2)$$

RESISTÊNCIA

Podemos observar que quando ligamos certos fios condutores a uma mesma fonte, normalmente é de se esperar uma diferença de correntes nesses fios condutores. A ideia da resistência está ligada a dificuldade que a corrente apresenta em sua passagem pelo condutor. Um condutor cuja função em um circuito é oferecer certo tipo de resistência é chamado de **resistor**.

Vejamos a definição a seguir sobre Resistência (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 147):

Definição 4.3 Resistência

Medimos a resistência entre dois pontos de um condutor aplicando uma d.d.p. V ($V = \varepsilon$) entre esses pontos e medindo a corrente I resultante. A resistência R é dada por

$$R = \frac{\varepsilon}{i}. \quad (4.3)$$

CAPACITÂNCIA

O capacitor é um dispositivo que é usado para armazenar energia elétrica. Duas placas isoladas entre si, uma terá uma carga $+Q$ e outra $-Q$, e ambas terão o mesmo valor absoluto. Esse é a característica básica de qualquer capacitor.

São os capacitores, por exemplo, que armazenam a energia para se ter o flash com o brilho intenso de uma câmara fotográfica, pois, por si só, as baterias (pilhas) não têm energia suficiente para serem usadas diretamente, devido ao fato de que a mesma, só oferecer energia aos poucos.

A quantidade de carga que um capacitor consegue armazenar é chamada de capacitância. A capacitância é uma medida da quantidade de carga que precisa ser acumulada nas placas para produzir uma d.d.p. entre elas.

Vejamos a definição a seguir sobre Capacitância (Tipler e Mosca, 2009, p.109):

Definição 4.4 Capacitância

A razão da carga q pela d.d.p. V ($V = \varepsilon$) entre os dois condutores é denominada de capacitância do capacitor:

$$C = \frac{q}{\varepsilon}. \quad (4.4)$$

INDUTÂNCIA

A indutância é um parâmetro do circuito utilizado para descrever o indutor.

O indutor é um elemento do circuito sujeito a uma d.d.p. que pode ser utilizado para produzir um campo magnético desejado e armazenar energia nele. O indutor é representado graficamente por uma espiral (fio enrolado).

Um indutor é um componente elétrico que se opõe a qualquer alteração na corrente elétrica. É composto de um condutor espiral, enrolado em um núcleo de suporte cujo material pode ser magnético ou não-magnético. O comportamento dos indutores é baseado nos fenômenos associados a campos magnéticos. A fonte do campo magnético são cargas em movimento, ou corrente elétrica. Se a corrente variar com o tempo, o campo magnético variará com o tempo. Um campo magnético que varia com o tempo induz uma tensão em qualquer condutor imerso no campo. O parâmetro indutância relaciona a tensão induzida com a corrente (Nilsson e Susan, 2008, p. 131).

Se a corrente que atravessa o indutor varia, logo o fluxo magnético no núcleo das espiras também irá variar, e pela lei de Faraday ocorrerá uma f.e.m. induzida ε_L no indutor. Isso se chama auto-indução, e a f.e.m. induzida ε_L recebe o nome de f.e.m. auto-induzida.

Definição 4.5 Indutância

A indutância L de um indutor é uma constante relacionada com a d.d.p. V ($V = \varepsilon_L$) e com a taxa de variação da intensidade da corrente elétrica em relação ao tempo:

$$\varepsilon_L = L \frac{di}{dt}. \quad (4.5)$$

LEIS KIRCHHOFF

Existem duas leis clássicas de Kirchhoff (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 170,176):

Lei das tensões (Regra das malhas)

A soma algébrica das diferenças de potencial em uma malha fechada é zero.

Lei das correntes (Regra dos nós)

A soma algébrica das intensidades de corrente elétrica que chegam em um nó de um circuito elétrico é igual à soma algébrica das intensidades de corrente elétrica que saem do mesmo nó neste circuito elétrico.

No restante desse capítulo apresentamos a modelagem de alguns circuitos elétricos em série, utilizando EDOs. Estes estudos foram baseados nas referências Halliday, Resnick e Walker (2009), Nilsson e Susan (2008), Serway e Jewett (1996) e Tipler e Mosca (2009).

CIRCUITOS RC EM SÉRIE

Consideramos um circuito em série com uma f.e.m. ε , uma resistência R , uma capacitância C e uma chave S . Na Figura 4.1 a chave S está aberta, ou seja, o circuito não está fechado, o que resulta na ausência da corrente elétrica i . Entretanto quando a chave é ligada no ponto a , o capacitor C começa a ser carregado através do resistor R , pela corrente i . Depois que o capacitor está totalmente carregado, a chave S é deslocada para o ponto b , descarregando assim o capacitor.

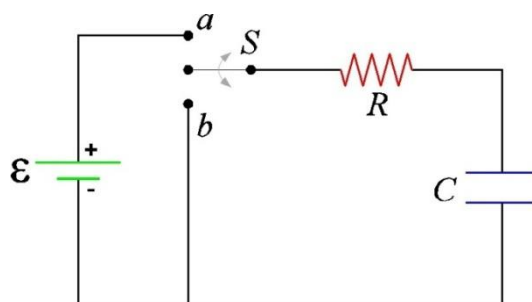


Figura 4.1. Circuito RC aberto.

Analisaremos matematicamente o circuito RC quanto ao carregamento do capacitor e seu descarregamento, modelando suas EDOs na variável tempo, onde nos preocuparemos com o interesse de sabermos o valor da carga e da corrente no instante t .

CARREGANDO UM CAPACITOR

Admitiremos que o capacitor esteja inicialmente descarregado.

Se a chave for fechada para o ponto a (Figura 4.2) no instante $t = 0$, a carga começa a fluir, e se estabelece uma corrente no circuito, dando início ao carregamento do capacitor.

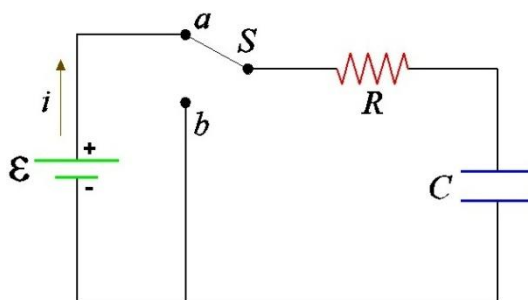


Figura 4.2. Circuito RC fechado em a .

Observamos que, durante esse processo de carregamento, as cargas não passam através do capacitor, pois o espaço entre as placas constitui uma interrupção no circuito. O que acontece na verdade é a transferência de cargas de uma para outra placa através do resistor, da chave e da bateria, até que o capacitor adquira a plena carga. O valor da carga máxima depende da f.e.m. da bateria. Uma vez atingida esta carga máxima, a corrente no circuito é nula.

A fim de fazer uma discussão quantitativa, vamos aplicar a regra das malhas de Kirchoff, ao circuito depois de a chave ter sido fechada. Isto nos dá

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0, \quad (4.6)$$

onde iR é a queda de potencial no resistor, e q/C a queda de potencial no capacitor. Observe que q e i são valores instantâneos da carga e da corrente, respectivamente, durante o processo de carga do capacitor.

Podemos usar a equação (4.6) para achar a corrente inicial no circuito e a carga máxima no capacitor. Em $t = 0$ quando a chave é fechada, a carga do capacitor é zero, e pela equação (4.1), vemos que a corrente inicial no circuito i_0 é no máximo e igual a

$$i_0 = \frac{\varepsilon}{R} \text{ (corrente em } t = 0\text{)}. \quad (4.7)$$

No instante em que a chave S é fechada a queda de potencial ocorre inteiramente no resistor. Depois, quando o capacitor estiver com a sua carga máxima Q , cessa o movimento das cargas, a corrente no circuito é nula, e a queda de potencial ocorre inteiramente no capacitor. A substituição de $i = 0$ na equação (4.6) nos dará a seguinte expressão para Q :

$$Q = C\varepsilon \text{ (carga máxima)}. \quad (4.8)$$

ou seja, a equação (4.8) indica que essa carga é a carga de saturação do capacitor.

A fim de determinar a expressão analítica da dependência temporal da carga e da corrente, devemos resolver a equação (4.6), uma equação com duas variáveis com q e i . Para efetuar esta resolução, vamos derivar a equação (4.1) em relação ao tempo

$$\frac{d}{dt} \left(\varepsilon - iR - \frac{q}{C} \right) = \frac{d}{dt} (0) \Rightarrow 0 - R \frac{di}{dt} - \frac{1}{C} \frac{dq}{dt} = 0.$$

Lembrando que $i = \frac{dq}{dt}$, podemos reescrever a última equação como sendo

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \quad (4.9)$$

Essa última expressão é uma EDO de primeira ordem, a qual se encaixa na classe de variáveis separáveis da seção 2.2.1 do Capítulo 2. Logo podemos reescrevê-la como sendo

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt. \quad (4.10)$$

Basta agora resolvermos essa equação para acharmos a corrente em função do tempo, tendo como o seguinte PVI:

$$\begin{cases} \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt \\ i(0) = i_0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Uma vez que R e C são constantes, (4.10) pode ser integrada em ambos os lados. Assim

$$\int \frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} \int dt$$

$$\ln(i) = -\frac{t}{RC} + k$$

onde k é a constante de integração. Aplicando a exponencial em ambos os lados dessa última expressão, teremos

$$e^{\ln(i)} = e^{(-t/RC)+k}$$

$$i = e^{-t/RC} e^k,$$

como e^k é uma constante, podemos trocá-la por outra constante generalizada qualquer. Tomando $w = e^k$, e substituindo-o na última expressão, obtemos a seguinte solução geral de (4.9):

$$i = we^{-t/RC}. \quad (4.12)$$

Aplicando o PVI em (4.12), $i = we^{-t/RC} \Rightarrow i_0 = we^0 \Rightarrow i_0 = w$, teremos a seguinte solução particular de (4.9)

$$i = i_0 e^{-t/RC}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.7) em (4.13) chegamos na seguinte expressão para a corrente do circuito no instante t :

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}. \quad (4.14)$$

Fazendo uma análise temporal da equação (4.14):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{R}$;
- Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 0$.

Isso demonstra a característica de um capacitor em um circuito elétrico. Quando $t = 0$ é como se o capacitor não existisse, ou seja, é como se ele fosse apenas um fio. Entretanto, quando $t \rightarrow \infty$ é como se o capacitor fosse uma “chave aberta” para o circuito, interrompendo assim a corrente elétrica.

Vamos achar agora a carga no capacitor em função do tempo. Substituindo $i(t) = \frac{dq}{dt}$ na equação (4.14), temos a seguinte EDO separável:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}. \quad (4.15)$$

Podemos reescrever (4.15) da mesma forma que a modelagem anterior. Separando as variáveis q e t obtemos,

$$dq = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} dt \quad (4.16)$$

que está sujeita ao seguinte PVI:

$$\begin{cases} dq = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} dt \\ q(0) = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Integrando (4.16) em ambos os lados da equação teremos

$$\int dq = \int \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} dt.$$

Para integrarmos o segundo membro desta expressão, usamos a relação bem conhecida $\int e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x}$, com isso

$$\int dq = \int \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} dt$$

$$q = -RC \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC} + k.$$

De onde chegamos, na seguinte solução geral de (4.15)

$$q = -C\varepsilon e^{-t/RC} + k \quad (4.18)$$

onde k é a constante de integração.

Aplicando o PVI em (4.18)

$$0 = -C\varepsilon e^{-0/RC} + k$$

$$0 = -C\varepsilon + k$$

$$C\varepsilon = k. \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) em (4.18) obtemos a seguinte solução particular de (4.15):

$$q = -C\varepsilon e^{-t/RC} + C\varepsilon$$

$$q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) \quad (4.20)$$

Substituindo (4.8) em (4.20) teremos a seguinte expressão para o carregamento do capacitor no instante t :

$$q(t) = Q(1 - e^{-t/RC}). \quad (4.21)$$

Podemos fazer uma análise temporal da equação (4.21), confirmando matematicamente o que foi dito anteriormente sobre a carga do capacitor:

- Quando $t = 0 \Rightarrow q = 0$;
- Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow q \rightarrow Q$

O produto RC que aparece nas Equações (4.14) e (4.21) tem dimensão de tempo e recebe um nome especial. Tal produto é chamado de constante de tempo capacitiva, que cuja representação é a letra grega τ (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 183):

$$\tau = RC. \quad (4.22)$$

Notemos que se substituirmos no instante $t = \tau = RC$ na equação (4.14), obtemos

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{RC}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-1} \cong 0,37 \frac{\varepsilon}{R}.$$

Isso significa que no instante τ (a primeira constante de tempo) a corrente decaiu 37% do seu valor (Figura 4.3). Do mesmo modo, se substituirmos no instante $t = \tau = RC$ na equação (4.21) obtemos: $q(t) = Q(1 - e^{-(RC)/RC}) = Q(1 - e^{-1}) \cong 0,63Q$

Isso significa que no instante τ (a primeira constante de tempo) a carga do capacitor aumentou de 0 a 63% do seu valor final (Figura 4.4).

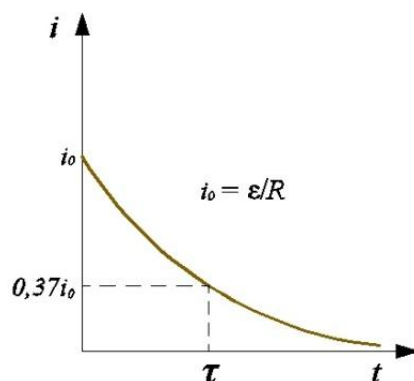


Figura 4.3. Corrente no circuito durante o carregamento do capacitor.

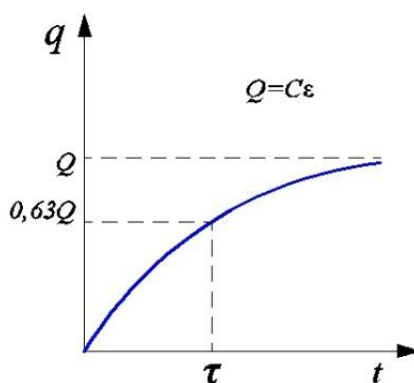


Figura 4.4. Carga do capacitor durante o carregamento do capacitor.

Podemos reescrever a equação (4.4) como sendo

$$q = CV \tag{4.23}$$

e substituindo (4.23) em (4.20) $CV(t) = C\epsilon(1 - e^{-t/RC})$ ou $V(t) = \epsilon(1 - e^{-t/RC})$, obtemos a seguinte expressão para a d.d.p. entre as placas do capacitor durante o processo de carregamento

$$V_c(t) = \epsilon(1 - e^{-t/RC}). \tag{4.24}$$

Fazendo a análise temporal da equação (4.24):

- Quando $t = 0 \Rightarrow V_c = 0$
- Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow V_c \rightarrow \epsilon$.

DESCARREGANDO UM CAPACITOR

Vamos considerar agora que o capacitor da Figura 4.2 esteja totalmente carregado. Com isso, a carga inicial do capacitor é a sua carga máxima Q_0 , onde na placa superior temos a carga

$+Q_0$ e na placa inferior temos $-Q_0$. Como vimos anteriormente, o valor inicial da d.d.p. V_0 do capacitor se iguala com a da f.e.m. ε do circuito.

Supondo que em um novo tempo $t = 0$ a chave S da Figura 4.2, seja deslocada do ponto a para o ponto b , iniciando assim, o processo de descarga do capacitor através da resistência R . Vejamos isso na figura abaixo

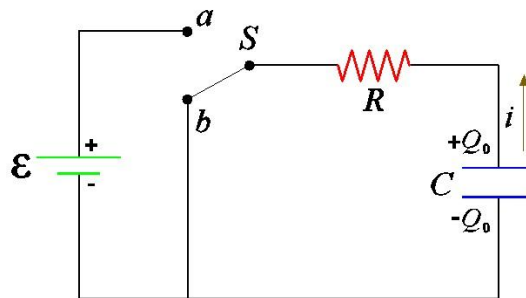


Figura 4.5. Circuito RC fechado em b .

Vamos agora achar primeiro a expressão temporal da carga, para depois acharmos a corrente. Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff ao circuito depois de a chave ter sido fechada, teremos

$$iR + \frac{q}{c} = 0. \quad (4.25)$$

Lembrando que a f.e.m. ε agora é nula, pois ela não está mais no circuito e por isso igualamos essa última a zero.

Substituindo (4.2) em (4.5) obtemos a seguinte EDO:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0. \quad (4.26)$$

A equação (4.26) é uma EDO de primeira ordem de variáveis separáveis. Separando suas variáveis, teremos

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}.$$

Como já vimos anteriormente, a solução geral de (4.26) será

$$q = e^{-t/RC} e^k.$$

Basta agora acharmos a solução particular de (4.26) para definirmos a expressão quantitativa da carga em função do tempo. O PVI, durante o descarregamento do capacitor é:

$$\begin{cases} R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0 \\ q(0) = Q_0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Resolvendo (4.27), achamos a seguinte expressão para a carga em função do tempo, referente ao descarregamento do capacitor no circuito:

$$q(t) = Q_0 e^{-t/RC}. \quad (4.28)$$

Lembrando que, $Q_0 = CV_0$ é a carga inicial e máxima do capacitor.

Fazendo a análise temporal da equação (4.28):

- Quando $t = 0 \Rightarrow q = Q_0$
- Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow q \rightarrow 0$.

Para acharmos a expressão para a corrente, basta derivarmos (4.28) em relação ao tempo, desse modo teremos $\frac{d(q)}{dt} = \frac{d}{dt} (Q_0 e^{-t/RC})$. Notemos que, o lado esquerdo dessa última é a corrente i . Logo substituindo $i(t) = \frac{dq}{dt}$, e derivando o lado direito, chegaremos na seguinte expressão: $i(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}$. O sinal negativo representa a ideia da direção oposta da corrente, em relação ao carregamento do capacitor.

Na análise posterior que faremos da equação (4.29), notaremos que a corrente inicial do circuito é $i_0 = \frac{Q_0}{RC}$. Assim, teremos a seguinte expressão para a corrente no instante t durante a descarga do capacitor:

$$i(t) = -i_0 e^{-t/RC}. \quad (4.29)$$

Fazendo a análise temporal da equação (4.29):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = -\frac{Q_0}{RC}$ (corrente inicial)
- Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 0$.

Podemos observar que a carga no capacitor (Figura 4.6) governada pela equação (4.28) e da corrente (Figura 4.7) governada pela equação (4.29), decrescem exponencialmente a uma taxa caracterizada pela constante tempo $\tau = RC$. Vejamos abaixo esses gráficos:

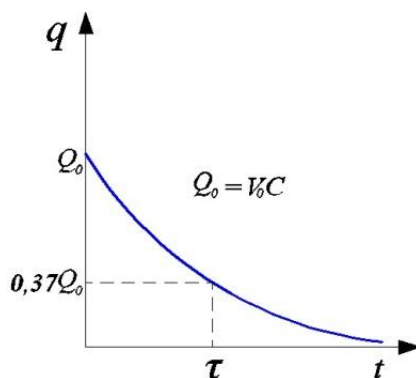


Figura 4.6. Carga do capacitor durante o descarregamento do capacitor.

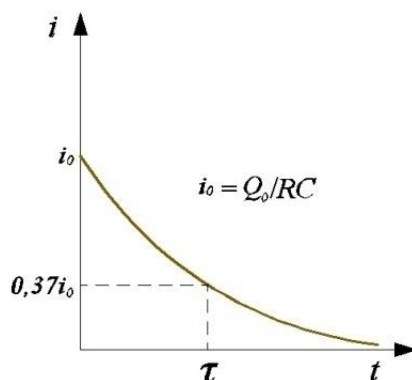


Figura 4.7. Corrente no circuito durante o descarregamento do capacitor.

CIRCUITOS *RL* EM SÉRIE

Consideramos um circuito em série com uma força eletromotriz \mathcal{E} , um resistor de resistência R , um indutor com uma indutância L e uma chave S . Na figura 4.7 a chave S está aberta, ou seja, o circuito não está fechado, o que resulta na ausência da corrente elétrica i .

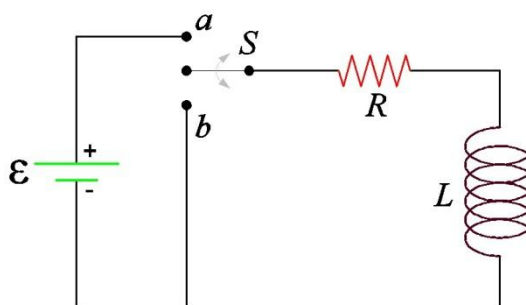


Figura 4.7. Circuito *RL* aberto.

Quando a chave S é deslocada para o ponto a (Figura 4.8), com a presença do indutor, uma f.e.m. $\mathcal{E}_L = L di/dt$ auto-induzida aparece no circuito, cuja polaridade é oposta à f.e.m. da fonte \mathcal{E} . Nessa situação, e de acordo com a lei de Lenz, \mathcal{E}_L vai se opor ao aumento da corrente no circuito. Assim a corrente i fica no meio desse jogo entre a d.d.p. da fonte e a da induzida.

Com o passar do tempo a d.d.p. \mathcal{E}_L diminui, aumentando assim a corrente i através do resistor R , chegando à expressão máxima \mathcal{E}/R .

Se removermos bruscamente a fonte \mathcal{E} do circuito da Figura 4.8, deslocando a chave S para a posição b (Figura 4.10), depois que a corrente já está no seu valor máximo, a corrente irá diminuir, mas não instantaneamente. Desse modo a corrente no resistor cai para zero gradativamente.

Generalizando, inicialmente o indutor se opõe a qualquer variação da corrente que o atravessa. Após um tempo suficientemente longo ele se comporta como um fio comum

(Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 281). Depois que retiramos bruscamente a f.e.m. do circuito, a corrente tenderá a zero com o passar do tempo.

Vamos determinar agora a expressão analítica da dependência temporal da corrente no circuito RL , quando a chave S da Figura 4.7 é deslocada para o ponto a . Vejamos a figura abaixo:

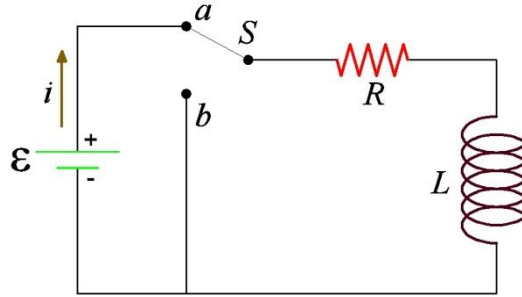


Figura 4.8. Circuito RL fechado em a .

Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff, depois de a chave ter sido fechada teremos a seguinte EDO já remanejada:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \varepsilon. \quad (4.30)$$

A equação (4.30) é uma EDO linear de primeira ordem. Podemos resolvê-la da mesma maneira como foi apresentada na secção 2.2.4. Colocando-a na forma (2.34) obtemos

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\varepsilon}{L}. \quad (4.31)$$

O fator integrante $\mu(t)$ de (4.31) será $\mu(t) = e^{t.R/L}$. Multiplicando (4.31) pelo fator integrante obtemos,

$$\begin{aligned} e^{t.R/L} \left(\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i \right) &= e^{t.R/L} \left(\frac{\varepsilon}{L} \right) \\ e^{t.R/L} \frac{di}{dt} + e^{t.R/L} \frac{R}{L}i &= e^{t.R/L} \frac{\varepsilon}{L}. \end{aligned}$$

Como sabemos essa última expressão resulta em

$$\frac{d}{dt} (e^{t.R/L}i) = e^{t.R/L} \frac{\varepsilon}{L}. \quad (4.32)$$

Integrando (4.32) em ambos os membros da equação e isolando i , obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dt} (e^{t.R/L}i) dt &= \int e^{t.R/L} \frac{\varepsilon}{L} dt \\ e^{t.R/L}i &= \frac{\varepsilon}{L} \int e^{t.R/L} dt \\ e^{t.R/L}i &= \frac{\varepsilon}{R} e^{t.R/L} + k \end{aligned}$$

Chegamos então na solução geral de (4.30)

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R} + ke^{-t.R/L}. \quad (4.33)$$

Resolvendo o PVI dado, cuja condição inicial é $i(0) = 0$, obteremos

$$k = -\frac{\varepsilon}{R}. \quad (4.34)$$

Substituindo (4.34) em (4.33) teremos a expressão para a corrente no circuito instante t :

$$i(t) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-t.R/L}). \quad (4.35)$$

Fazendo a análise temporal da equação (4.35):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = 0$ (corrente inicial)
- Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow \frac{\varepsilon}{R}$.

A constante de tempo τ para o circuito RL é dada por

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (4.36)$$

e, é chamada de constante de tempo indutiva (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 282).

Da mesma maneira como discutimos no circuito RC , τ tem dimensão de tempo. Se substituirmos (4.36) em (4.35) obtemos

$$i\left(\frac{L}{R}\right) = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{L.R}{R.L}}\right) = \frac{\varepsilon}{R}(1 - e^{-1}) \cong 0,63\frac{\varepsilon}{R}.$$

Logo, a constante de tempo τ no circuito RL é o tempo necessário que a corrente i precisa para atingir 63% do seu valor final ε/R .

Graficamente temos a curva característica da corrente no circuito da Figura 4.8:

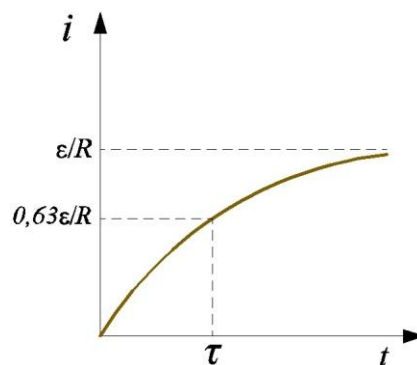


Figura 4.9. Corrente no circuito RL com a fonte ε .

Vamos supor agora que depois de a corrente ter atingido seu valor máximo (Figura 4.8), a chave seja deslocada da posição a para a posição b (Figura 4.10). Isso vai fazer com que a f.e.m. seja “desconectada” no circuito.

Para que não haja uma variação brusca da corrente é preciso que a ligação no ponto b seja feita antes de a ligação no ponto a seja interrompida; uma chave capaz de realizar essa operação é chamada de *make-before-break* (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 283).

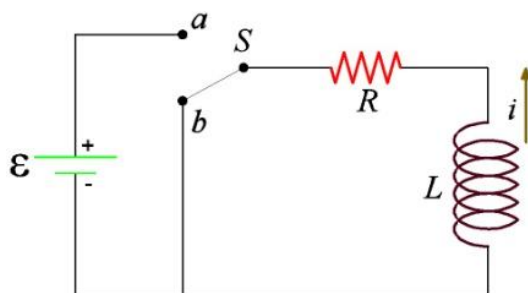


Figura 4.10. Circuito RL fechado em b .

Nesse novo momento do circuito, a corrente decresce, mas não instantaneamente e sim exponencialmente.

Segundo a regra das malhas de Kirchhoff, a expressão analítica da dependência temporal do decrescimento da corrente no circuito será:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (4.37)$$

Reparamos que (4.37) é quase igual a (4.30) o que muda é que neste caso $\varepsilon = 0$. A equação (4.37) é uma EDO de primeira ordem com variáveis separáveis. Separando suas variáveis obtemos

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt. \quad (4.38)$$

Integrando (4.38) em ambos os membros da equação e resolvendo-a, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{di}{i} &= \int -\frac{R}{L} dt \\ \ln(i) &= -\frac{R}{L}t + k \\ e^{\ln(i)} &= e^{-\frac{R}{L}t+k} \\ i &= e^{-\frac{R}{L}t+k} \\ i(t) &= we^{-\frac{R}{L}t}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

No caso trocamos e^k por w .

Logo, (4.39) é a solução geral de (4.38). Podemos achar agora a solução particular de (4.38). As condições iniciais são $i(0) = \frac{\varepsilon}{R}$, que é a corrente inicial i_0 desse novo momento do circuito. Desse modo, pelo PVI apresentado, temos

$$\frac{\varepsilon}{R} = w = i_0. \quad (4.40)$$

Substituindo (4.40) em (4.39) obtemos a expressão para a diminuição da corrente no circuito da Figura 4.10 no instante t :

$$i(t) = i_0 e^{-t.R/L}. \quad (4.41)$$

Fazendo a análise temporal da equação (4.41):

- Quando $t = 0 \Rightarrow i = i_0$ (corrente inicial)
- Quando $t \rightarrow \infty \Rightarrow i \rightarrow 0$.

Graficamente temos a curva característica da corrente no circuito da Figura 4.10:

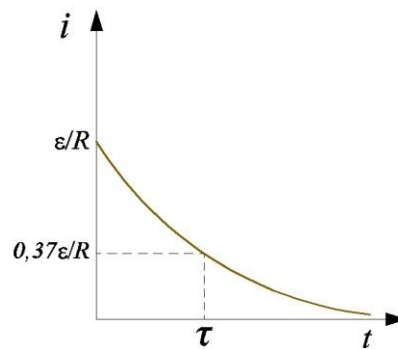


Figura 4.11. Corrente no circuito RL sem a fonte ε .

CIRCUITOS *LC* EM SÉRIE

Vamos analisar agora a combinação de dois elementos em um circuito: capacitor e o indutor (Figura 4.12)

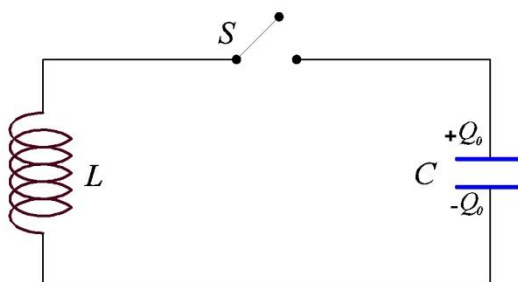


Figura 4.12. Circuito *LC* aberto.

Nesse circuito a carga, a corrente e a d.d.p. não crescem ou decrescem exponencialmente com o tempo. O que acontece são oscilações senoidais com um período T e uma frequência angular ω .

As oscilações que ocorrem no campo elétrico do capacitor e no campo magnético do indutor são chamadas de **oscilações eletromagnéticas** (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 305).

Vamos considerar que o capacitor da Figura 4.12 esteja totalmente carregado com uma carga inicial Q_0 . Se fecharmos a chave S (Figura 4.13), uma corrente i passara pelo indutor que o qual irá começar a armazenar uma energia.

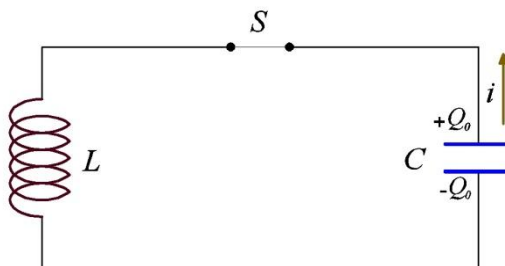


Figura 4.13. Circuito *LC* fechado.

Vamos definir agora as energias que são armazenadas no capacitor e no indutor (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 305).

Definição 4.6 Energia armazenada em um capacitor em qualquer instante

A energia armazenada no campo elétrico de um capacitor com capacitância C e com uma determinada carga q num certo instante é dada por

$$U_E = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.42)$$

Definição 4.7 Energia armazenada em um indutor em qualquer instante

A energia armazenada no campo magnético em um indutor com indutância L e com uma determinada corrente i num certo instante é dada por

$$U_B = \frac{Li^2}{2}. \quad (4.43)$$

A energia U total armazenada em qualquer instante em um circuito LC oscilante é a energia total no capacitor mais a energia total no indutor em certo instante:

$$U = U_B + U_E. \quad (4.44)$$

Substituindo (4.42) e (4.43) em (4.44) obtemos $U = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$. Derivando essa última em relação ao tempo teremos $\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) \Rightarrow 0 = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$.

Como $i = \frac{dq}{dt}$ essa última equação fica

$$0 = Li \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} i. \quad (4.45)$$

Dividindo (4.45) por i em ambos os lados, chegamos em $L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0$. Lembrando que $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$, podemos reescrever essa última equação, como sendo a seguinte EDO de segunda ordem homogênea que descreve o circuito LC :

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (4.46)$$

Como vimos no Capítulo 3, essa última equação é uma EDO linear e homogênea com coeficientes constantes. A equação auxiliar de (4.46) é

$$Lm^2 + \frac{1}{C} = 0. \quad (4.47)$$

Resolvendo (4.47), teremos as seguintes raízes complexas conjugadas

$$m_1 = i/\sqrt{LC}$$

$$m_2 = -i/\sqrt{LC}.$$

Assim, a solução geral de (4.46) se encaixa no Caso 3 da seção 3.3.2. Logo a solução geral de (4.46) é

$$q(t) = c_1 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t + c_2 \sen \frac{1}{\sqrt{LC}} t. \quad (4.48)$$

Chamando $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, que é a frequência angular das oscilações no circuito LC , e substituindo-a em (4.48), obtemos a seguinte expressão

$$q(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sen \omega t. \quad (4.49)$$

Vamos achar agora a solução particular. Para isso analisamos o PVI do circuito. As condições iniciais são:

$$\begin{cases} q(0) = Q_0 \\ q'(0) = 0. \end{cases} \quad (4.50)$$

Derivando (4.49) em relação ao tempo, teremos:

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{d}{dt}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t) \\ \frac{dq}{dt} &= -c_1 \omega \operatorname{sen} \omega t + c_2 \omega \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Substituindo $q(0) = Q_0$ em (4.49) temos

$$\begin{aligned} Q_0 &= c_1 \cos \omega \cdot (0) + c_2 \operatorname{sen} \omega \cdot (0) \\ 0 &= c_1(1) + c_2(0) \\ c_1 &= Q_0. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Substituindo agora (4.52) e $q'(0) = 0$ em (4.51) temos

$$\begin{aligned} 0 &= -(Q_0)\omega \operatorname{sen} \omega(0) + c_2 \omega \cos \omega(0) \\ 0 &= c_2 \omega \\ c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Obteremos assim, a seguinte expressão para a carga no oscilador LC :

$$q(t) = Q_0 \cos \omega t. \quad (4.54)$$

A equação (4.54) nos mostra que Q_0 é a amplitude da carga (Figura 4.14).

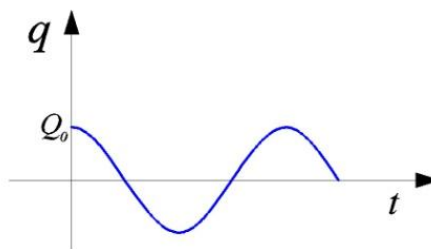


Figura 4.14. Carga no circuito LC .

Notemos que a equação (4.51) na verdade é a solução geral da corrente no circuito no instante t . Substituindo então (4.52) e (4.53) em (4.51) obteremos a seguinte expressão para a corrente no circuito

$$i(t) = -\omega Q_0 \operatorname{sen} \omega t. \quad (4.55)$$

A equação (4.55) nos mostra que ωQ_0 é a amplitude da corrente no circuito (Figura 4.15).

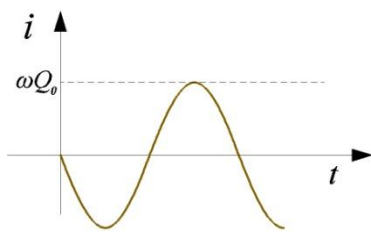


Figura 4.15. Corrente no circuito LC .

CIRCUITOS *RLC* EM SÉRIE – OSCILAÇÕES AMORTECIDAS

Um circuito que tem um capacitor, um resistor e um indutor, é chamado de *circuito RLC*. Vamos analisar o circuito do tipo da Figura 4.16.

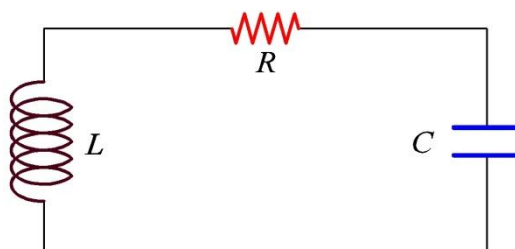


Figura 4.16. Circuito *RLC* amortecido.

Se tivéssemos uma f.e.m. introduzida no circuito da Figura 4.16, as oscilações seriam ditas como forçadas. (Halliday, Resnick e Walker, 2009, p. 315).

Nesse caso, a carga no circuito irá oscilar entre o capacitor e o indutor como vimos nos circuitos *LC*. Entretanto certa quantidade de energia é dissipada no resistor, o que resultará progressivamente na diminuição das oscilações. Logo a energia total do circuito não é constante, pois diminui com o tempo. O que nos leva a concluir que as oscilações da carga, da corrente e da d.d.p. diminuem continuamente de amplitude, dizendo assim que as oscilações nesse circuito são *amortecidas*.

Aplicando a regra das malhas de Kirchhoff no circuito da Figura 4.16, teremos

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} q = 0. \quad (4.56)$$

Diferenciando (4.56) uma vez em relação ao tempo t . Teremos

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} \frac{dq}{dt} = 0. \quad (4.57)$$

Como $i = \frac{dq}{dt}$, obtemos a seguinte EDO de segunda ordem que descreve o Circuito *RLC* amortecido:

$$L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{c} i = 0. \quad (4.58)$$

Teremos três possibilidades para a solução geral de (4.58). Cada uma dessas possibilidades depende do valor do discriminante da equação auxiliar da mesma abaixo

$$Lm^2 + Rm + \frac{1}{c} = 0. \quad (4.59)$$

As raízes $m_{1,2}$ de (4.59) em função dos elementos do circuito serão:

$$m_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L}.$$

ou

$$m_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (4.60)$$

Chamando

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \text{ e } \delta = \frac{R}{2L},$$

podemos reescrever a equação (4.60) como sendo

$$m_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}. \quad (4.61)$$

A resposta da corrente nesse circuito terá três casos distintos (Nilsson e Riedel, 2008, p. 215): Superamortecida; Subamortecida; Criticamente amortecida.

Caso 1: Superamortecida ($\omega^2 < \delta^2$)

Nesse caso teremos duas raízes distintas negativas e reais m_1 e m_2 . Portanto, conforme vimos no Capítulo 3, na seção 3.3.2, a solução geral de (4.58), nesse caso será:

$$i(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}. \quad (4.62)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Vejamos o comportamento de (4.62) na Figura 4.17:

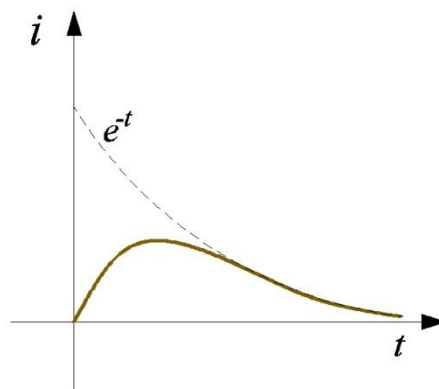


Figura 4.17. Corrente superamortecida.

Podemos notar que a corrente aumenta e depois tende para zero conforme o tempo aumenta.

Caso 2: Subamortecida ($\omega^2 > \delta^2$)

Nesse caso teremos duas raízes complexas conjugadas: $m_1 = -\delta + \omega_d i$ e $m_2 = -\delta - \omega_d i$, onde $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$.

Portanto, conforme vimos no Capítulo 3, na seção 3.3.2, a solução geral de (4.58), nesse caso será:

$$i(t) = e^{-t\delta}(c_1 \cos \omega_d t + c_2 \sin \omega_d t). \quad (4.63)$$

Veamos o comportamento de (4.63) na Figura 4.18:

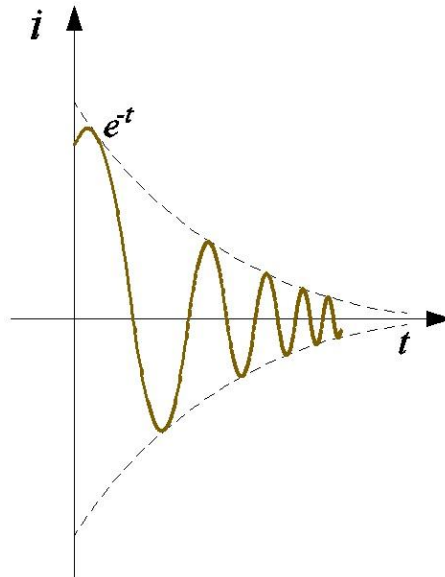


Figura 4.18. Corrente subamortecida.

Podemos notar que a corrente oscila e diminui fortemente tendendo para zero conforme o tempo aumenta.

Coso 3: Criticamente amortecida ($\omega^2 = \delta^2$)

Nesse caso teremos apenas uma raiz real m . Essa única raiz terá a seguinte expressão:

$$m = -\frac{R}{2L} = -\delta.$$

Portanto, conforme vimos no Capítulo 3, na seção 3.3.2, a solução geral de (4.58) nesse caso será:

$$i(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\delta t}, \quad (4.64)$$

sendo c_1 e c_2 , constantes arbitrárias.

Veamos o comportamento de (4.62) na Figura 4.19:

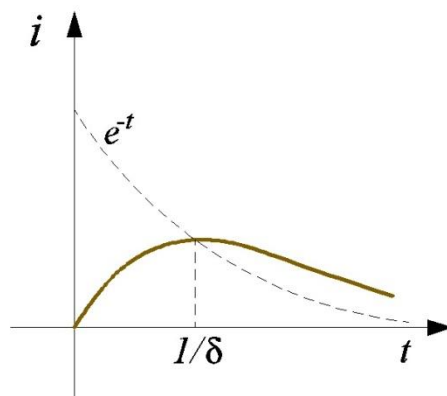


Figura 4.19. Corrente criticamente amortecida.

O comportamento da corrente nesse caso é semelhante com a do primeiro caso. Entretanto nesse caso, a corrente tem um aumento mais significativo e demora um pouco mais para ser dissipada.

Assim, vimos como alguns circuitos elétricos simples são modelados por meio de equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem. Podendo, com base nas EDOs usadas, estudar o comportamento de alguns componentes desses circuitos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho de conclusão de curso, com o objetivo de estudar a modelagem de circuitos elétricos, foram estudadas equações diferenciais ordinárias de primeira e segunda ordem. Foram estudados métodos de resolução de EDOs e suas características. Possibilitando assim a boa compreensão da modelagem dos circuitos elétricos estudados.

Podemos notar a importância das equações diferenciais como ferramentas para resoluções de diversos problemas envolvendo fenômenos físicos, dentre esses estão os circuitos elétricos, objeto do nosso estudo de aplicação.

Notemos ainda que ao modelarmos os circuitos elétricos apontados, precisávamos primeiramente entender como que se comportava o fenômeno físico. As modelagens foram construídas em de acordo com a regra das malhas de Kirchhoff, que serviu de alicerce para as mesmas.

Por isso, entender como um fenômeno físico se comporta e identificar as variáveis relevantes, é fundamental para a modelagem usando as EDOs.

O toque de classe da ciência é a previsibilidade das coisas através da matemática. A previsão que fizemos para saber qual o valor da corrente em um determinado instante, só é mais um dos inúmeros exemplos de modelos matemáticos usando as EDOs.

As equações diferenciais sendo ordinárias ou não, são bons exemplos das interações entre a matemática e as outras ciências e continuam tendo ainda várias aplicações por serem descobertas, pois sempre haverá um fenômeno físico cujo comportamento depende de taxas de variações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Bassanezi RC, Ferreira Júnior WC. (1988). Equações diferenciais com aplicações. São Paulo: Harbra Ltda.
- Boyce WE, Prima RC (2002). Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 7ª. ed., Rio de Janeiro: LTC.
- Edwards Júnior CH, Penney DE (1995). Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Contorno. 3ª. ed., Rio de Janeiro: LTC.
- Figueiredo DG, Neves AF (2002). Equações diferenciais aplicadas. 2ª.ed. Rio de Janeiro: IMPA.
- Halliday D, Resnick R, Walker J (2009). Fundamentos de física. vol 3. 8ª. ed. Rio de Janeiro: LTC.
- Nilsson JW, Riedel AS (2009). Circuitos Elétricos. 8ª. ed. São Paulo: Pearson.
- Santos RJ (2010). Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias. Departamento de Matemática – ICEX. Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em: <<http://www.mat.ufmg.br/~regi/eqdif/existunic.pdf>>. Acesso em: 23 out. 2014.
- Soclof S (2014). História dos circuitos elétricos. Disponível em: <http://tecnologia.hsw.uol.com.br/circuitos3.htm>. Acesso em: 20 out. 2014.
- Serway RA, Jewett Junior JW (2005). Princípios de física: Eletromagnetismo. vol 3. 3ª. ed. São Paulo: Thomson.
- Swokowski EW (1994). Cálculo com geometria analítica. 2ª.ed. São Paulo: Makron Books.
- Tipler PA, Mosca G (2009). Física para Cientistas e Engenheiros. vol 1. 6ª.ed. Rio de Janeiro: LTC.
- Zill DG, Gullen MR (2001). Equações diferenciais. vol 1. 3ª.ed. São Paulo: Makron Books.



Alan Mario Zuffo

Graduado em Agronomia pela UNEMAT. Mestre em Agronomia - Fitotecnia (Produção Vegetal) UFPI. Doutor em Agronomia - Fitotecnia (Produção Vegetal) UFLA. Pós-Doutorado em Agronomia na UEMS. Prof. UFMS em Chapadão do Sul.



Jorge González Aguilera

Graduado em Agronomia pelo ISCA-B (Cuba). Especialista em Biotecnologia pela Universidad de Oriente (Cuba). Mestrado em Fitotecnia e Doutorado em Genética e Melhoramento pela UFV e Post Doutorado na Embrapa Trigo. Prof. UFMS em Chapadão do Sul.



Bruno Rodrigues de Oliveira

Graduado em Matemática pela UEMS. Mestrado em Engenharia Elétrica UNESP-Ilha Solteira e Doutorado em andamento na mesma instituição. Pesquisador independente.

Pantanal Editora

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000
Nova Xavantina – Mato Grosso - Brasil
Telefone (66)99682-4165 (Whatsapp)
<https://www.editorapantanal.com.br>
contato@editorapantanal.com.br

ISBN 978-658146002-0

