

# Caminhos da Matemática

História,  
Educação e  
Aplicações

Bruno Rodrigues de Oliveira  
Alan Mario Zuffo  
Jorge González Aguilera  
(Organizadores)



Pantanal Editora

2019

Bruno Rodrigues de Oliveira  
Alan Mario Zuffo  
Jorge González Aguilera  
(Organizadores)

# Caminhos da Matemática

## História, Educação e Aplicações



Pantanal Editora

2019

Copyright© Pantanal Editora  
Copyright do Texto© 2019 Os Autores  
Copyright da Edição© 2019 Pantanal Editora  
**Editor Chefe:** Prof. Dr. Alan Mario Zuffo  
**Editores Executivos:** Prof. Dr. Jorge González Aguilera  
Prof. Dr. Bruno Rodrigues de Oliveira

**Diagramação:** Os editores  
**Edição de Arte:** Os editores e autores  
**Revisão:** Os Autores

#### **Conselho Editorial**

- Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Albys Ferrer Dubois – UO
- Prof. Dr. Caio Cesar Enside de Abreu – UNEMAT
- Prof. Msc. David Chacon Alvarez – UNICENTRO
- Prof. Dr. Fábio Steiner - UEMS
- Prof. Msc. Javier Revilla Armesto – UCG
- Prof. Dr. Julio Cezar Uzinski – UFMT
- Prof. Msc. Lucas Rodrigues Oliveira – Município de Chapadão do Sul
- Prof. Dr. Rafael Felipe Ratke – UFMS
- Prof. Dr. Wéverson Lima Fonseca – UFC
- Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Yilan Fung Boix – UO

#### **Conselho Técnico Científico**

- Esp. Joacir Mário Zuffo Júnior - UNEMAT
- Esp. Maurício Amormino Júnior - UFMG

| <b>Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)</b><br><b>(eDOC BRASIL, Belo Horizonte/MG)</b> |   |
|---|---|
| <b>C183</b>   | Caminhos da matemática [recurso eletrônico] : história, educação e aplicações / Organizadores Bruno Rodrigues de Oliveira, Alan Mario Zuffo, Jorge González Aguilera. – Nova Xavantina, MT: Pantanal Editora, 2019. 138 p. : il.<br><br>Formato: PDF<br>Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader<br>Modo de acesso: World Wide Web<br>ISBN 978-65-81460-02-0<br><br>1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática – Formação. I. Oliveira, Bruno Rodrigues de. II. Zuffo, Alan Mario. III. Aguilera, Jorge González.<br><br>CDD 510.07 |
| <b>Elaborado por Maurício Amormino Júnior – CRB6/2422</b>   |   |

O conteúdo dos livros e capítulos, seus dados em sua forma, correção e confiabilidade são de responsabilidade exclusiva dos autores. O download da obra é permitido e o compartilhamento desde que sejam citadas as referências dos autores, mas sem a possibilidade de alterá-la de nenhuma forma ou utilizá-la para fins comerciais.

Pantanal Editora  
Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000. Nova Xavantina – Mato Grosso - Brasil  
Telefone (66 )99682-4165 (Whatsapp)  
<https://www.editorapantanal.com.br>  
[contato@editorapantanal.com.br](mailto:contato@editorapantanal.com.br)

## Apresentação

As principais vertentes no estudo das ciências da matemática são: história da matemática, aspectos relativos ao ensino e aprendizagem da disciplina, o estudo da matemática por si mesma, denominada de matemática pura e também as aplicações das teorias matemáticas.

Neste livro são apresentadas discussões sobre questões relativas a história da matemática, a educação e aplicações.

No primeiro tópico, os autores elaboram um texto que resgata a história do primeiro matemático brasileiro a obter o doutoramento, destacando suas principais contribuições.

No segundo tópico, é apresentada uma pesquisa sobre o ensino/aprendizagem da disciplina de matemática financeira no nível superior, empregando a metodologia de ensino e avaliação *Team Based Learning*.

Mesclando os tópicos de aplicação e educação, temos um trabalho sobre as funções e equações exponenciais e logarítmicas, tratando um pouco sobre seu desenvolvimento e importância históricos e sua utilização até os dias atuais.

Por último, relativo ao tópico de aplicação, duas pesquisas ilustram diferentes teorias matemáticas, concernentes a análise de dados e equações diferenciais, exibindo suas aplicações na análise de sinais de voz e estudo de circuitos elétricos, respectivamente.

Assim sendo, este livro trilha apenas uns pouquíssimos caminhos construídos pela matemática. Pretendemos que esta obra seja ampliada para que esta disciplina tão essencial para o desenvolvimento da ciência possa ser melhor compreendida em suas mais diferentes abordagens.

**Bruno Rodrigues de Oliveira**

**Alan Mario Zuffo**

**Jorge González Aguilera**

## SUMÁRIO

|   |    |
|---|----|
| <b>Capítulo 1</b> .....   | 5  |
| Joaquim Gomes De Souza (1829-1864): A Construção de uma Imagem de Souzinha  |    |
| <b>Capítulo 2</b> .....   | 37 |
| Aplicações de funções e equações exponenciais e logarítmicas  |    |
| <b>Capítulo 3</b> .....   | 51 |
| Ensino de matemática financeira no curso de licenciatura em matemática e bacharelado em ciências contábeis: reflexões dos impactos no processo de ensino/aprendizagem e/ou no mercado de trabalho |    |
| <b>Capítulo 4</b> .....   | 61 |
| Extração de Características em Sinais de Voz por meio da Análise de Componentes Independentes   |    |
| <b>Capítulo 5</b> .....   | 76 |
| Equações Diferenciais Ordinárias na Aplicação de Circuitos Elétricos  |    |

# Aplicações de funções e equações exponenciais e logarítmicas

Marco Aparecido Queiroz Duarte<sup>1\*</sup>

Regina Litz Lamblém<sup>1</sup>

## INTRODUÇÃO

No fim do século XVI, o desenvolvimento da Astronomia e da Navegação exigia longos e laboriosos cálculos aritméticos (Lima, 2010). Por causa dessa demanda procurava-se uma maneira mais fácil de realizar os cálculos, o que originou o seguinte problema matemático da época: reduzir as operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação em adição e subtração, consideradas mais simples.

Cientes desse problema, vários pessoas se ocupavam em resolvê-lo. Foi assim que John Napier (1550–1617), um nobre escocês, teólogo e matemático e, Jost Bürgi (1552– 1632), suíço, fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, cada um deles desconhecendo inteiramente o outro, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos (Lima, 2010). O primeiro em 1614 e o segundo em 1620. Porém as tábuas de Napier tornaram-se mais conhecidas devido ao seu contato com professores universitários e às suas publicações. Mais tarde o conceito de logaritmo apresentado por Napier foi aperfeiçoadas pelo inglês Henry Briggs (1561–1630).

Com o advento do logaritmo podiam-se transformar o produto e a divisão, respectivamente em uma soma e em uma subtração, assim como uma potência e a radiciação em uma multiplicação e divisão, respectivamente, que por sua vez podem se transformarem em adições e subtrações por meio do logaritmo. Fato que facilitava em muito os cálculos, já que à época não existiam as calculadoras e computadores como atualmente.

Considerando essas informações históricas e o fato de atualmente podermos utilizar as calculadoras e os computadores para efetuarmos os mais diversos cálculos, podíamos pensar que os logaritmos perderam sua utilidade. Entretanto, veremos a partir desse trabalho que tanto o logaritmo quanto a sua inversa, a exponencial, tem lugar de destaque na modelagem e resolução de muitos problemas naturais e sociais da atualidade.

---

<sup>1</sup> Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul—UEMS—Unidade Universitária de Cassilândia. Rodovia MS 306.

\* Autor de correspondência: marco@uems.br

Assim, neste capítulo apresentamos algumas das aplicações das funções e equações exponenciais e logarítmicas na modelagem de fenômenos naturais e sociais, bem como na resolução de problemas diversos. Para isso, damos continuidade ao texto com uma introdução sobre as funções e equações exponenciais e logarítmicas.

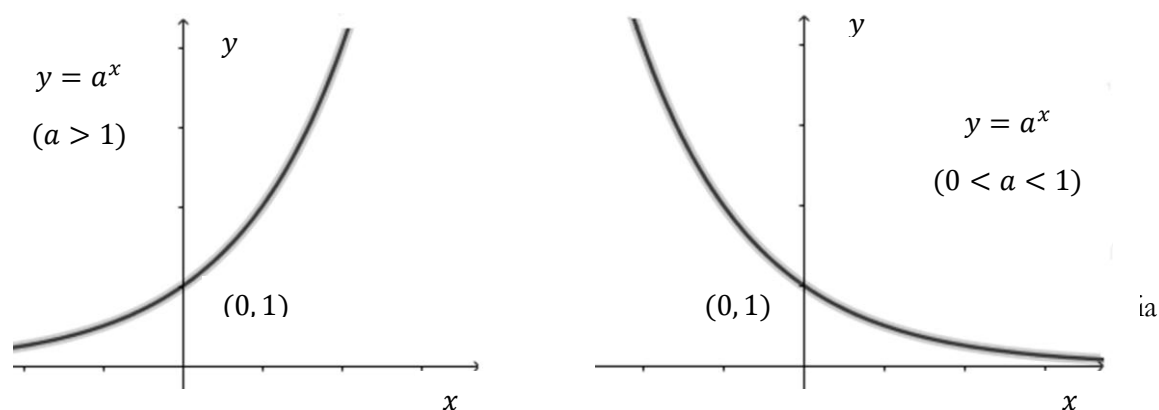
## FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Ao elevar um número constante maior que 0 e diferente de 1 a um expoente que é uma variável obtemos uma representação da função exponencial. De outra maneira, podemos dizer que a função exponencial de base  $a$  é a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ , representada algebricamente por

$$f(x) = a^x, \text{ com } 0 < a \neq 1.$$

Ou seja, a função exponencial possui domínio em  $\mathbb{R}$  e imagem em  $\mathbb{R}_+^*$  (conjunto dos números reais positivos e sem o zero).

A função exponencial pode ser representada por meio de gráficos, como na Figura 1.



**Figura 1.** Representação gráfica de função exponencial. Fonte: Própria autoria.

A representação gráfica da função exponencial corta o eixo  $y$  no ponto de ordenada 1 e está acima do eixo  $x$ .

A função exponencial também pode ser representada por meio de tabelas com valores que descrevem uma relação funcional apresentando características exponenciais, como na Tabela 1, a seguir:

**Tabela 1.** Representação de uma função exponencial. Fonte: Própria autoria.

|        |     |     |     |   |   |   |   |
|--------|-----|-----|-----|---|---|---|---|
| $x$    | -3  | -2  | -1  | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 2 | 4 | 8 |

É comum encontrar na literatura a expressão “*creceu exponencialmente*”. Essa expressão vem do fato de que quando  $a > 1$  a função exponencial cresce muito rápido. E quando  $0 < a < 1$ , a função exponencial é decrescente, como pode ser observado nos gráficos da Figura 1.

Considerando  $a, b > 0$ , então para todo  $x$  e  $y$  reais as funções exponenciais satisfazem às seguintes propriedades:

$$E_1) a^x a^y = a^{x+y};$$

$$E_2) (ab)^x = a^x b^y;$$

$$E_3) (a^x)^y = a^{xy};$$

$$E_4) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$E_5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}.$$

Além disso, a função exponencial cuja base é o número de Euler (o número irracional  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  que vale aproximadamente 2,718281828) é conhecida como função exponencial natural, e é denotada por  $e^x$  ou  $exp(x)$ .

Em matemática, o termo função inversa é usado para descrever uma função que desfaz o efeito da outra, assim, se duas funções  $f$  e  $g$  satisfazem as condições  $g(f(x)) = x$ , para todo  $x$  no domínio de  $f$  e  $f(g(y)) = y$ , para todo  $y$  no domínio de  $g$ , então  $f$  e  $g$  são funções inversas. Nesse sentido, podemos dizer que a função inversa da exponencial na base  $a$  é a função logarítmica de base  $a$ , representada algebricamente por

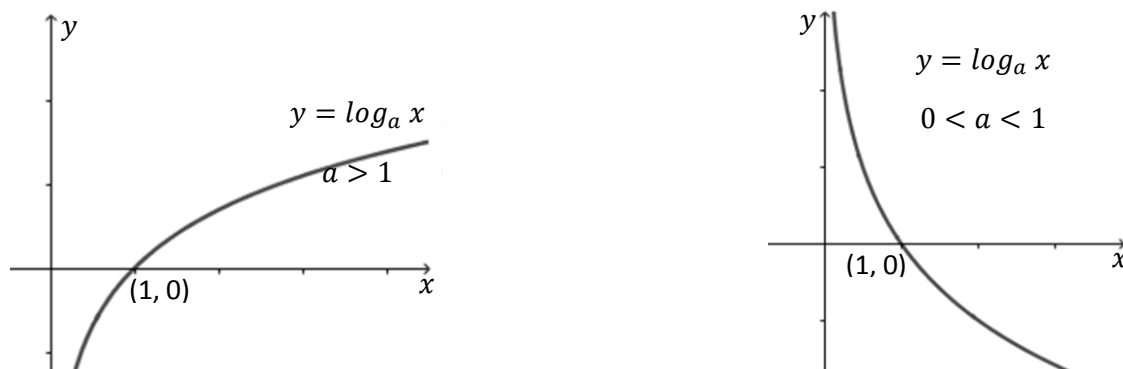
$$f(x) = \log_a x, \text{ com } 0 < a \neq 1 \text{ e } x > 0.$$

Dessa forma, o domínio da função logarítmica é representado pelo conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio, o conjunto dos reais.

No decorrer deste capítulo quando não for mencionada a base  $a$ , significa que estamos usando a base 10, por exemplo,  $f(x) = \log x$  significa  $f(x) = \log_{10} x$ .

Na Figura 2, a seguir, representamos a função logarítmica por meio de gráficos.





**Figura 2.** Representação gráfica de função logarítmica. Fonte: Própria autoria.

Conforme pode ser observado na Figura 2, as representações gráficas das funções logarítmicas ficam à direita do eixo  $y$  e cortam o eixo  $x$  no ponto de abscissa 1. Além disso, se  $a > 1$  a função logarítmica é crescente e se  $0 < a < 1$  ela é decrescente.

Considerando  $R$  e  $S$  reais positivos, as funções logarítmicas satisfazem às seguintes propriedades:

- $L_1) \log_a 1 = 0;$
- $L_2) \log_a a = 1;$
- $L_3) \log_a (RS) = \log_a R + \log_a S;$
- $L_4) \log_a \left(\frac{R}{S}\right) = \log_a R - \log_a S;$
- $L_5) \log_a (R^c) = c \log_a (R), c \in \mathbb{R}.$

Em geral, abreviamos  $\log_{10} x$  como  $\log x$  e o logaritmo natural  $\log_e x$ , sendo  $e$  o número de Euler, como  $\ln x$ . Tanto a exponencial natural quanto o logaritmo natural recebem essa nomenclatura “natural” devido às suas aplicações na natureza.

Outra propriedade importante é a de mudança de base. Considerando  $a, b$  e  $c$  números reais positivos com  $a$  e  $c$  diferentes de 1, então podemos mudar o logaritmo da base  $a$  para a base  $c$ , como segue:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ . Essa propriedade é conhecida como mudança de base, e é bastante útil, pois permite converter o logaritmo de um número positivo, em certa base, para outro em base conveniente (Iezzi, Dolce e Murakami, 1993).

Um exemplo de situação que precisamos fazer a mudança de base aparece quando vamos utilizar uma calculadora para calcular um logaritmo que não é natural ou não está na base 10, pois as calculadoras científicas possuem a tecla  $\log$  que é usada para calcular o logaritmo na

base 10 e a tecla  $\ln$  que é usada para calcular o logaritmo natural. Assim, se queremos calcular  $\log_2 8$  por meio de uma calculadora científica, temos que mudar a base do logaritmo para 10 ( $\log_2 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 2}$ ) ou para  $e$  ( $\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2}$ ) e encontrarmos o quociente utilizando as teclas  $\log$  ou  $\ln$ , respectivamente.

A seguir abordaremos sobre conhecimentos relacionados às equações exponenciais e logarítmicas.

## EQUAÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Equações exponenciais são equações que envolvem uma incógnita no expoente, por exemplo,  $2^x = 8$  e  $2^x = 3$ .

Apresentaremos a seguir dois métodos fundamentais para resolver as equações exponenciais.

O primeiro é denominado método da redução a uma base comum e consiste em reduzir ambos os membros da equação, quando for possível, a potências de mesma base  $a$ ,  $0 < a \neq 1$ , pelo fato de potências iguais e de mesma base terem expoentes iguais, ou seja,  $a^b = a^c$ , então  $b = c$ , para  $0 < a \neq 1$ . Por exemplo, esse método pode ser aplicado no caso  $2^x = 8$ , pois  $2^x = 2^3$ , logo  $x = 3$ .

O segundo método é aplicado nos casos em que a redução de ambos os membros da equação a uma mesma base  $a$ ,  $0 < a \neq 1$ , não pode ser feita aplicando as propriedades de potenciação, por isso, aplicamos a função logarítmica de base  $a$  em ambos os lados da equação, isto é,  $a^x = b$ , então  $x = \log_a b$ , para  $b > 0$ . Por exemplo, esse método pode ser aplicado no caso  $2^x = 3$ , pois  $\log_2 2^x = \log_2 3$ , e conforme vimos na seção anterior,  $\log_2 2^x = x \log_2 2$  e  $\log_2 2 = 1$ , logo  $x = \log_2 3$ .

As equações logarítmicas são equações em que a incógnita aparece em um logaritmo, por exemplo,  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ,  $\log_a f(x) = c$  ou  $\log_a f(x) + \log_a g(x) = c$  com  $c \in \mathbb{R}$  e  $0 < a \neq 1$ . Utilizam-se métodos diferentes para encontrar a solução de cada uma dessas equações logarítmicas, por isso, dividiremos em três casos.

O primeiro envolve a igualdade entre dois logaritmos de mesma base, isto é,  $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ,  $0 < a \neq 1$ . Nesse caso a solução é dada fazendo  $f(x) = g(x) > 0$ .

O segundo caso envolve a igualdade entre um logaritmo e um número, ou seja,  $\log_a f(x) = c$ , com  $c \in \mathbb{R}$  e  $0 < a \neq 1$ . Nesse caso a solução é dada fazendo  $f(x) = a^c$ .

O terceiro caso envolve as equações que podemos resolver usando uma incógnita auxiliar. Por exemplo,  $\log_a^2 f(x) + \log_a f(x) = c$  com  $c \in \mathbb{R}$  e  $0 < a \neq 1$ . Nesse caso,

podemos usar uma incógnita auxiliar, ou seja, tomamos  $y = \log_a f(x)$  e obtemos  $y^2 + y - c = 0$ . Assim, basta resolver a equação polinomial do segundo grau  $y^2 + y - c = 0$  e substituir os valores  $y_1$  e  $y_2$  para encontrados a equação  $y = \log_a f(x)$  para obtermos o conjunto solução  $\{a^{y_1} = f(x), a^{y_2} = f(x)\}$ .

## APLICAÇÕES

Logaritmos e exponenciais estão em várias aplicações, às vezes se relacionando entre si. Conforme vimos, por exemplo, a equação  $3^x = 7$  não pode ser resolvida pela redução, por meio da decomposição em fatores primos, dos números 3 e 7 a uma mesma base inteira. Porém, podemos usar a propriedade da igualdade de logaritmos em uma mesma base e escrever  $\log 3^x = \log 7$ . Depois, pela propriedade do logaritmo da potência, temos  $x \log 3 = \log 7$ . E, portanto, a solução da equação é  $x = \frac{\log 7}{\log 3}$ .

A equação logarítmica  $\log(x + 1) = 3$  é resolvida diretamente da definição de logaritmo. Mas, também pode ser resolvida pela igualdade de exponenciais, da seguinte forma:  $10^{\log(x+1)} = 10^3$ , o que leva a  $x + 1 = 1000$ . Concluindo que  $x = 999$ .

As resoluções das equações anteriores, por meio dos respectivos usos de logaritmos e exponenciais, só foram possíveis pelo fato das funções exponenciais e logarítmicas serem inversas uma das outras.

Nesta seção apresentamos algumas aplicações de exponenciais e logaritmos em problemas que nem sempre os terão em suas modelagens, mas que usam um ou outro em suas resoluções.

## Juros Compostos

Se um capital  $C$  é aplicado a uma taxa de juros  $i$  por um período de um mês, então o montante  $M$ , ao final desse mês será  $M = C \cdot (1 + i/100)$ . Se a aplicação for feita por dois meses, então o montante final será  $M = C \cdot (1 + i/100) \cdot (1 + i/100)$ . Assim, se tal aplicação se der por um período de  $n$  meses, ao final do  $n$ -ésimo mês, teremos

$$M = C \cdot \underbrace{(1 + i/100) \cdot (1 + i/100) \dots (1 + i/100)}_{n \text{ vezes}}$$

Assim, podemos concluir que o montante  $M$ , dados o capital  $C$  investido a uma taxa de juros  $i$  por um número  $n$  de períodos (dias, meses, anos, etc.) é dado pela expressão

$$M(n) = C \cdot (1 + i/100)^n,$$

que nada mais é que uma equação exponencial.

**Exemplo 1:** Oitocentos reais são aplicados a juros compostos em um banco a uma taxa mensal de 1,5% ao mês. Determine:

- qual o montante em 4 meses;
- em aproximadamente quantos meses o capital dobrará de valor.

**Solução:** Primeiro, verificamos que esse é um problema de juros compostos onde o capital inicial  $C$  é de R\$ 800,00, a taxa de juros é  $i = 1,5\%$  e o período  $n$  é dado em meses. Assim,

$$M(n) = 800. \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^n = 800. (1,015)^n.$$

- a) Temos que determinar o montante quando  $n = 4$ . Logo,

$$M(4) = 800. (1,015)^4 = 849,09.$$

Portanto, em quatro meses o montante será de R\$ 849,09.

- b) Agora, precisamos dizer em quanto tempo o capital dobrará de valor, ou seja, em quanto tempo devemos deixar aplicado o dinheiro até que ela atinja R\$ 1600,00. Assim, temos que determinar  $n$  para o qual se terá  $M = 1600$ . Teremos então que resolver a equação

$$800. (1,015)^n = 1600.$$

Que implica

$$(1,015)^n = 2.$$

Aplicando um logaritmo de mesma base em ambos os lados, teremos

$$\log(1,015)^n = \log 2,$$

implicando,

$$n \log(1,015) = \log 2.$$

Que equivale a

$$n = \frac{\log 2}{\log(1,015)}.$$

Como  $\log 2 \cong 0,301$  e  $\log 1,015 \cong 0,0065$  então concluímos que  $n \cong 46$ . Portanto, em aproximadamente 46 meses o capital dobrará de valor.

Ao resolver o exemplo anterior, no item (a), para se descobrir o montante em 4 meses, calcula-se direto o valor da função exponencial para  $n = 4$ ; no item (b), a aplicação do logaritmo é necessária para se chegar ao tempo que o capital levará para ser dobrado.

## Dinâmica Populacional

Um dos modelos mais clássicos de cálculo de crescimento de uma população é o modelo de Malthus (Tomas Robert Malthus (1766–1834)). Nele há a afirmação de que a taxa de variação de uma determinada população em relação ao tempo, denotada por  $\frac{dP}{dt}$ , é diretamente proporcional à população  $P$  presente. Isto significa que se  $P = P(t)$  então

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

sendo que o símbolo  $\frac{dP}{dt}$  representa a derivada da função  $P$  em relação ao tempo  $t$  (Guidorizzi, 2018).

A equação anterior é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem (Zill e Cullen, 2001), que pode ser reescrita como

$$\frac{dP}{P} = k dt,$$

cujas resoluções podem ser dadas por integração direta em relação a  $P$  e a  $t$ ,

$$\int \frac{dP}{P} = \int k dt + c_1,$$

que tem como resultado

$$\ln P = kt + c_1.$$

Porém, queremos encontrar uma expressão para  $P(t)$ . Isso conseguiremos se aplicarmos a função exponencial a ambos os lados da equação anterior:

$$e^{\ln P} = e^{kt+c_1}.$$

Assim, por propriedades do logaritmo e da exponencial e fazendo  $c = e^{c_1}$ , temos:

$$P(t) = ce^{kt}.$$

No instante  $t = 0$  teremos  $P(0) = P_0$  que é a população inicial. Fazendo  $t = 0$  e  $P(t) = P_0$  na equação anterior, tem-se a que população em um instante  $t$  é dada por

$$P(t) = P_0 e^{kt},$$

que é uma função exponencial.

**Exemplo 2:** Observando, em um instante inicial, uma população de cisnes, foram contados 85 elementos. 6 meses depois essa população era de 102 cisnes. Considerando que tal população é regida pelo modelo de Malthus, determine quantos indivíduos ela terá em 18 meses a partir da primeira observação.

**Solução:** Considerando que a primeira observação se deu no instante  $t = 0$  mês, então  $P_0 = 85$ . Logo,

$$P(t) = 85e^{kt}.$$

Precisamos agora obter o valor  $k$  para completar os parâmetros da função  $P(t)$ . Para isso usaremos a informação  $P(6) = 102$ . Assim,

$108 = 85e^{k \cdot 6}$  ou  $e^{6k} = \frac{102}{85}$ . Há então a necessidade da aplicação do logaritmo natural em ambos os lados, resultando em  $6k = \ln\left(\frac{102}{85}\right)$  ou  $k = \ln\left(\frac{102}{85}\right)/6$  e, portanto,  $k = 0,030386... \cong 0,03$ . Dessa forma, concluímos que

$$P(t) = 85e^{0,03t}.$$

Por fim, para sabermos a população em 18 meses, basta calcularmos  $P(18)$ ,

$$P(18) = 85e^{0,03 \cdot 18} = 85e^{0,54} \cong 146.$$

Portanto, em 18 meses a população será de 146 cisnes.

O modelo de Malthus diz que a população tem crescimento exponencial, por isso, ela cresce ou decresce muito rápido com o passar do tempo. Assim, esse modelo não é aplicável a todas as populações, principalmente por não considerar a taxa de mortalidade e a competição entre espécies. Mas, se adequa a populações pequenas ou populações que necessitem de análises em curto prazo. Por envolver a derivada  $\frac{dP}{dt}$  de uma função em sua modelagem (Guidorizzi, 2018), o modelo de Malthus é classificado como modelo diferencial.

### Lei de Esfriamento de Newton

Outro modelo diferencial semelhante ao de Malthus é a lei de esfriamento de Newton, (Zill; Cullen, 2001), que diz que a taxa de esfriamento de um corpo em função do tempo  $\frac{dT}{dt}$  é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo  $T$  e a temperatura do meio ambiente  $T_m$ , isto é,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m).$$

A equação anterior pode ser resolvida de forma análoga à do modelo de Malthus, produzindo a solução

$$T(t) = T_m + ce^{kt}.$$

E considerando que no primeiro instante de contato com o ambiente,  $t = 0$ , a temperatura do corpo seja  $T(0) = T_0$ , teremos  $c = T_0 - T_m$  e, conseqüentemente,

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{kt}.$$

Assim, a resolução de problemas de esfriamento de corpos envolverão sempre uma função exponencial, ou uma equação exponencial cuja solução pode passar também por uma equação logarítmica.

Existem ainda outras aplicações relativas a fenômenos naturais que resultam em modelos semelhantes aos dois citados anteriormente, dentre eles podemos citar o cálculo da meia vida de um fármaco, cálculo de reações químicas entre substâncias, cronologia do carbono C-14 e cálculo da pressão atmosférica em uma região (Zill; Cullen, 2001; Boyce; Dippima, 2015, Morais Filho; Oliveira, 2014). A modelagem dos fenômenos citados sempre resultará em funções exponenciais ou logarítmicas.

### Escala Richter

A Escala Richter, também conhecida como escala de magnitude local, é um sistema usado para medir a intensidade de um terremoto conforme a energia por ele desprendida (Morais Filho, Oliveira, 2014). Elaborada por Charles Francis Richter (1900-1985) com a colaboração de Beno Gutenberg (1889-1960), seu limite, teoricamente, não existe, mas é comum a convenção de que não haja terremotos que ultrapassem a magnitude 10.

Para se calcular a magnitude  $M$  de um terremoto, conforme a escala Richter, são usados valores medidos por meio de registros gráficos de um sismógrafo, obtendo-se a equação a seguir.

$$M = \log A + 3 \log(8\Delta t) - 2,92 = \log \left( \frac{A\Delta t^3}{1,62} \right)$$

onde:

$A$  = amplitude das ondas sísmicas, em milímetros, medida diretamente no sismograma.

$\Delta t$  = tempo, em segundos, desde o início do trem de ondas primárias até à chegada das ondas secundárias.

$M$  = magnitude arbitrária, mas constante, aplicável a sismos que libertem a mesma quantidade de energia.

A Escala Richter é, por definição, uma escala logarítmica. O uso de escalas logarítmicas é comum quando tem valores muito grandes para se expressar, pois, como o logaritmo de um número é sempre menor do que ele, isso faz com que um número grande seja representado na

escala logarítmica por um valor bem menor ou, na maioria das vezes, muito menor. No caso de logaritmos na base 10, esse número é representado apenas pelo expoente de sua potência de base 10. Por exemplo, na escala Richter, um tremor de intensidade cinco é 10 vezes mais forte que um de escala quatro e, conseqüentemente, 100 vezes mais forte que um de nível três.

Uma forma mais simples para o cálculo da magnitude  $M$  é considerar que  $M$  é a diferença entre o logaritmo da amplitude máxima  $A$  da onda gerada pelo terremoto e o logaritmo da amplitude padrão  $A_0$ , isto é,

$$M = \log A - \log A_0.$$

Não se deve confundir a magnitude com a intensidade de um terremoto. Magnitude é uma medida quantitativa do tamanho do terremoto. Ela está relacionada com a energia sísmica liberada no foco e também com a amplitude das ondas registradas pelos sismógrafos. Enquanto que intensidade sísmica é uma medida qualitativa que descreve os efeitos produzidos pelos terremotos em locais da superfície terrestre. A classificação da intensidade sísmica é feita a partir da observação “in loco” dos danos ocasionados nas construções, pessoas ou meio ambiente. Porém, tanto magnitude quanto intensidade estão relacionadas à força do terremoto. Por isso, quanto maior elas forem maiores são os estragos causados.

A intensidade, que muitas vezes é informada no lugar da magnitude, é dada por

$$I = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0},$$

sendo  $E$  a energia liberada pelo terremoto em kW (quilowatt) e  $E_0 = 7 \times 10^{-3}$ . Pode-se ainda relacionar a energia  $E$  com a magnitude  $M$  por (Morais Filho; Oliveira, 2014)

$$\log E = 11,8 + 1,5M.$$

**Exemplo 3:** Determine a energia liberada por um terremoto de magnitude 4,7 na escala Richter.

**Solução:** Como  $M = 4,7$ , temos

$$\log E = 11,8 + 1,5 \times 4,7 \Leftrightarrow \log E = 18,85 \Leftrightarrow E = 10^{18,85}.$$

Portanto, a energia liberada por esse terremoto  $E = 10^{18,85}$  kW.

A solução desse simples exemplo mostra o quanto é importante o uso do logaritmo para se expressar a magnitude de um terremoto, pois se fizermos  $18,85 \cong 19$ , para expressar a energia teríamos que escrever o número 1 seguido de 19 zeros, algo muito mais difícil de expressar e de ler do que o simples valor 4,7.



A escala Richter não é a única a ser usada para a medição de terremotos. Outra escala muito usada também é a de Mercalli, devida ao vulcanólogo e sismologista italiano Giuseppe Mercalli (1850-1914). Atualmente, a escala mais usada para a medição de sismos é de Mercalli Modificada (MM). A MM indica o grau de intensidade sísmica de um terremoto e varia de 1 até 12 (NIDM, 2014). Além disso, estudos mais atuais trabalham em formas diferentes de se medir e prever a magnitude de terremotos com mais exatidão (Denolle, *et al.*, 2018; Herp, 2019).

### Potenciais Hidrogeniônico e Hidroxiliônico

O potencial (ou potência) hidrogeniônico,  $pH$ , de uma solução se refere a concentração de  $H^+$  (ou  $H_3O^+$ ) nesta solução (Baccan et al., 2004; Harris, 2012). O  $pH$  é calculado pela seguinte fórmula:

$$pH = -\log H^+.$$

O potencial Hidroxiliônico,  $pOH$ , se refere a concentração de  $OH^-$  numa solução e é calculado por

$$pOH = -\log H^-.$$

Soluções que têm  $pH = pOH$  são consideradas neutras. Quando  $pH < pOH$ , a solução é ácida e se  $pH > pOH$  temos uma solução básica. Para qualquer solução, tem-se  $pH + pOH = 14$ . Assim, para soluções básicas tem-se  $pH = pOH = 7$ . Dessa forma, não é necessário calcular  $pH$  e  $pOH$  para classificar uma substância como neutra, ácida ou básica, basta calcular um dos dois. Geralmente, se usa o  $pH$ . E a substância será classificada como neutra se  $pH = 7$ , ácida se  $pH < 7$  e básica se  $pH > 7$ .

**Exemplo 4:** Uma substância com concentração de  $H^+$  igual a  $10^{-5}$  mol/L (moles por litro) é considerada ácida.

De fato,

$$pH = -\log 10^{-5} \Leftrightarrow pH = -(-5)\log 10 \Leftrightarrow pH = 5.$$

Portanto, a substância é ácida, pois  $pH = 5 < 7$ .

### Nível de Intensidade Sonora

A Intensidade sonora, também chamada de volume ou pressão sonora, diz respeito a percepção da amplitude de uma onda sonora (Sears, Zemansky, Young, 1994; Morais Filho, Oliveira, 2014). A percepção da intensidade pelo ouvido humano não é linear, é logarítmica. Ou

seja, o ouvido só percebe variações de intensidade como lineares, se as amplitudes variarem exponencialmente. Assim, para facilitar a medição da pressão sonora em relação à percepção auditiva, utiliza-se uma unidade logarítmica: o decibel (dB), em homenagem ao físico escocês Alexander Graham Bell (1847-1922).

O nível de intensidade sonora  $NIS$ , como dito no parágrafo anterior, é dado em escala logarítmica e definido por

$$NIS = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

sendo que  $I$  é a intensidade do som em  $W/m^2$  (Watt por metro quadrado) e  $I_0$  é um valor de referência, normalmente é adotado  $10^{-12} W/m^2$  que é a menor intensidade sonora audível.

**Exemplo 5:** Numa competição de som automotivo, mediu-se a intensidade do som emitido pelos autofalantes instalados em um carro, obtendo  $I = 10^2$ . Qual o volume do som emitido?

**Solução:** Considerando  $I_0 = 10^{-12}$  tem-se

$$NIS = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} \Leftrightarrow 10 \log 10^{14} = 10 \times 14 = 140.$$

Portanto, o volume do som emitido é 140 dB.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesse trabalho, vimos que os logaritmos surgiram a partir de problemas vividos no século XVI, como a necessidade de resolver operações consideradas difíceis e que demandavam muito tempo. Essas circunstâncias abriram caminho para que o conceito de funções logarítmicas e sua inversa, a função exponencial, se expandissem e fossem usadas para resolver vários problemas que emergiram no decorrer do tempo. Por isso, procuramos mostrar como as funções exponenciais e logarítmica estão associadas a várias aplicações e informações que fazem parte de nosso cotidiano. Para isso, primeiro definimos tais funções e apresentamos suas principais propriedades, seguidos de uma seção com aplicações.

Pudemos ver que tais funções aparecem em aplicações envolvendo fenômenos naturais e sociais. Por serem inversa uma da outra, tais funções se complementam em tais aplicações.

No que tange ao uso da escala logarítmica, enfatizamos que essa escala torna fácil e acessível a apresentação de dados que envolvem valores muito altos. Pois, esses valores são representados apenas pelos expoentes da potência da base logarítmica que representam.

Por fim, salientamos que apenas algumas aplicações envolvendo exponenciais e logaritmos foram apresentadas neste trabalho. Pois, trata-se de um assunto muito amplo com aplicações que surgem dia após dia.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baccan N, Andrade JC, Godinho OES, Barone JS (2001). Química Analítica, Quantitativa e Elementar. 3. ed. Editora: Edgard Blucher, São Paulo. 324p.
- Boyce WE, Diprima, RC (2015). Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. 10. ed. Editora: LTC, Rio de Janeiro. 680p.
- Denolle MA, Boué P, Hirata N, Beroza GC (2018). Strong Shaking Predicted in Tokyo From an Expected M7+ Itoigawa-Shizuoka Earthquake. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 123(5): 3968-3992.
- Guidorizzi, HL (2018) . Um Curso de Cálculo. 6. ed. vol. 1. Editora: LTC, Rio de Janeiro . 580p.
- Harris DC (2012). Análise Química Quantitativa. 8. Ed. Editora LTC, Rio de Janeiro. 966p.
- HERP - The Headquarters for Earthquake Research Promotion – (2019) - Understanding Earthquakes. Disponível em: [https://www.jishin.go.jp/main/index\\_fk-e.html](https://www.jishin.go.jp/main/index_fk-e.html). Acesso em 18/11/2019.
- Iezzi G, Dolce O, Murakami, C (1993). Fundamentos de Matemática. 8 ed. vol.2. Editora: Atual, São Paulo. 72p.
- Lima EL (2010). Logaritmos. Coleção do Professor de Matemática, 4. ed. Editora: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, Rio de Janeiro. 148p.
- Morais Filho DG, Oliveira MNA (2014), Análise da Contextualização da Função Exponencial e da Função Logarítmica nos Livros Didáticos do Ensino Médio, In. III Colóquio de Matemática da Região Nordeste, Ilhéus, 29 de setembro a 4 de outubro de 2014.
- NIDM – National Institute of Disaster Management – (2014) – Earthquake Measurements. Disponível em: [https://nidm.gov.in/easindia2014/err/pdf/earthquake/earthquakes\\_measurement.pdf](https://nidm.gov.in/easindia2014/err/pdf/earthquake/earthquakes_measurement.pdf). Acesso em 18/11/2019.
- Sears F, Zemansky MW, Young HD (1994). Física – volume 2 - Mecânica dos fluidos, calor, movimento ondulatório. 2. Ed. Editora LTC, Rio de Janeiro.
- Zill DG, Cullen MR (2001). Equações Diferenciais. 3 ed. vol. 1. Editora: Pearson, São Paulo. 473p.



## Alan Mario Zuffo

Graduado em Agronomia pela UNEMAT. Mestre em Agronomia - Fitotecnia (Produção Vegetal) UFPI. Doutor em Agronomia - Fitotecnia (Produção Vegetal) UFLA. Pós-Doutorado em Agronomia na UEMS. Prof. UFMS em Chapadão do Sul.



## Jorge González Aguilera

Graduado em Agronomia pelo ISCA-B (Cuba). Especialista em Biotecnologia pela Universidad de Oriente (Cuba). Mestrado em Fitotecnia e Doutorado em Genética e Melhoramento pela UFV e Post Doutorado na Embrapa Trigo. Prof. UFMS em Chapadão do Sul.



## Bruno Rodrigues de Oliveira

Graduado em Matemática pela UEMS. Mestrado em Engenharia Elétrica UNESP-Ilha Solteira e Doutorado em andamento na mesma instituição. Pesquisador independente.

### **Pantanal Editora**

Rua Abaete, 83, Sala B, Centro. CEP: 78690-000  
Nova Xavantina – Mato Grosso - Brasil  
Telefone (66 )99682-4165 (Whatsapp)  
<https://www.editorapantanal.com.br>  
[contato@editorapantanal.com.br](mailto:contato@editorapantanal.com.br)

ISBN 978-658146002-0

